



الرياضيات

الصف الثامن - كتاب الطالب

الفصل الدراسي الثاني

8

فريق التأليف

د. عمر محمد أبو غليون (رئيساً)

نور محمد حسان

إبراهيم أحمد عمارة

هبة ماهر التميمي

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:



06-5376262 / 237



06-5376266



P.O.Box: 2088 Amman 11941



@nccdjor



feedback@nccd.gov.jo



www.nccd.gov.jo

قرّرت وزارة التربية والتعليم تدريس هذا الكتاب في مدارس المملكة الأردنية الهاشمية جميعها، بناءً على قرار المجلس الأعلى للمركز الوطني لتطوير المناهج في جلسته رقم (2021/5)، تاريخ 2021/12/7 م، وقرار مجلس التربية والتعليم رقم (2021/159) تاريخ 2021/12/21 م بدءاً من العام الدراسي 2021 / 2022 م.

© Harper Collins Publishers Limited 2021.

- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

ISBN: 978 - 9923 - 41 - 194 - 0

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(2021/6/3385)

373,19

الأردن. المركز الوطني لتطوير المناهج

الرياضيات الصف الثامن: كتاب الطالب الفصل الثاني / المركز الوطني لتطوير المناهج - عمان: المركز، 2021

(174) ص.

ر.إ.: 2021/6/3385

الواصفات: / الرياضيات / المناهج / التعليم الاعدادي /

يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه، ولا يعبر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, sorted in retrieval system, or transmitted in any form by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without the prior written permission of the publisher or a license permitting restricted copying in the United Kingdom issued by the Copyright Licensing Agency Ltd, Barnard's Inn, 86 Fetter Lane, London, EC4A 1EN.

British Library Cataloguing -in- Publication Data

A catalogue record for this publication is available from the Library.

المقدمة

انطلاقاً من إيمان المملكة الأردنية الهاشمية الراسخ بأهمية تنمية قدرات الإنسان الأردني، وتسليحه بالعلم والمعرفة؛ سعى المركز الوطني لتطوير المناهج بالتعاون مع وزارة التربية والتعليم إلى تحديث المناهج الدراسية وتطويرها، لتكون معيّنًا للطلبة على الارتقاء بمستواهم المعرفي، ومجارة أقرانهم في الدول المتقدمة. ولمّا كانت الرياضيات إحدى أهمّ الموادّ الدراسية التي تنمّي لدى الطلبة مهارات التفكير وحلّ المشكلات، فقد أولى المركز هذا المبحث عنايةً كبيرةً، وحرص على إعداد كتب الرياضيات وفق أفضل الطرائق المُتبّعة عالمياً على يد خبراء أردنيين؛ لضمان انسجامها مع القيم الوطنية الراسخة، وتلبيتها لاحتياجات أبنائنا الطلبة والمعلّمين.

روعي في إعداد كتب الرياضيات تقديم المحتوى بصورة سلسلة، ضمن سياقات حياتية شائقة، تزيد رغبة الطلبة في التعلّم، ووظّفت فيها التكنولوجيا لتُسهم في جعل الطلبة أكثر تفاعلاً مع المفاهيم المُقدمة لهم. كما عُنِيَ بإبراز خطة حلّ المسألة، فأفرد لها دروساً مستقلة تتيح للطلبة التدرّب على أنواع مختلفة من هذه الخطط وتطبيقها في مسائل متنوعة. لقد احتوت الكتب على مشروع لكل وحدة؛ لتعزيز تعلّم الطلبة المفاهيم والمهارات الواردة فيها وإثرائها. ولأنّ التدرّب المكثّف على حلّ المسائل يُعدّ إحدى أهمّ طرائق ترسيخ المفاهيم الرياضية وزيادة الطلاقة الإجرائية لدى الطلبة؛ فقد أعدّ كتاب التمارين على نحوٍ يُقدّم للطلبة ورقة عمل في كل درس، تُحلّ بوصفها واجباً منزلياً، أو داخل الغرفة الصفية إن توافر الوقت الكافي. ولأنّنا ندرك جيداً حرص المعلّم الأردني على تقديم أفضل ما لديه للطلبة؛ فقد جاء كتاب التمارين أداةً مساعدة تُوفّر عليه جهد إعداد أوراق العمل وطباعتها.

من المعلوم أنّ الأرقام العربية تُستخدم في معظم مصادر تعليم الرياضيات العالمية، ولا سيّما على شبكة الإنترنت، التي أصبحت أداةً تعليميةً مُهمّةً؛ لما تزخر به من صفحات تُقدّم محتوىً تعليمياً تفاعلياً ذا فائدة كبيرة. وحرصاً منا على ألا يفوت أبنائنا الطلبة أيّ فرصة، فقد استعملنا في هذا الكتاب الأرقام العربية؛ لجسّر الهوة بين طلبتنا والمحتوى الرقمي العلمي، الذي ينمو بتسارع في عالم يخطو نحو التعليم الرقمي بوتيرة متسارعة.

ونحن إذ نقدّم الطبعة الأولى (التجريبية) من هذا الكتاب، نأمل أن تنال إعجاب أبنائنا الطلبة ومعلميهم، وتجعل تعليم الرياضيات وتعلّمها أكثر متعةً وسهولةً، ونعدهم بأن نستمرّ في تحسين هذا الكتاب في ضوء ما يصلنا من ملاحظات.

المركز الوطني لتطوير المناهج

الوحدة 6 أنظمة المعادلات الخطية 38

مشروع الوحدة: الأشجار سريعة النمو 39

الدرس 1 حل نظام من معادلتين خطيتين بيانياً 40

معمل برمجية جيوجيبرا:

تمثيل نظام من معادلتين خطيتين بيانياً 47

الدرس 2 حل نظام من معادلتين

خطيتين بالتعويض 48

الدرس 3 حل نظام من معادلتين خطيتين بالحذف .. 56

اختبار الوحدة 66

الوحدة 5 المتباينات الخطية 6

مشروع الوحدة: درجات الغليان والإنصهار 7

الدرس 1 كتابة المتباينات وتمثيلها 8

الدرس 2 حل المتباينات بالجمع والطرح 15

الدرس 3 حل المتباينات بالضرب والقسم 22

الدرس 4 حل المتباينات متعددة الخطوات 29

اختبار الوحدة 36



الوحدة 8 الأشكال ثلاثية الأبعاد 114

مشروع الوحدة: الأشكال ثلاثية الأبعاد 115

الدرس 1 رسم الأشكال ثلاثية الأبعاد 116

الدرس 2 المقاطع والمجسمات الدّورانية 124

الدرس 3 حجم الكرة ومساحة سطحها 132

اختبار الوحدة 140

الوحدة 9 الإحصاء والاحتمالات 142

مشروع الوحدة: جمع البيانات، وتحليلها 143

الدرس 1 الرّبيعيّات 144

الدرس 2 اختيار التمثيل الأنسب 154

الدرس 3 عدّ النواتج 161

الدرس 4 احتمال الحوادث المركّبة 166

اختبار الوحدة 173

الوحدة 7 الأشكال ثنائية الأبعاد 68

مشروع الوحدة: المنسّاخ 69

الدرس 1 إثبات توازي المستقيمت وتعامدها 70

الدرس 2 متوازي الأضلاع 77

الدرس 3 تمييز متوازي الأضلاع 84

الدرس 4 حالات خاصّة من متوازي الأضلاع 91

الدرس 5 تشابه المثلثات 99

الدرس 6 التمدّد 106

اختبار الوحدة 112

المتباينات الخطية

ما أهمية هذه الوحدة؟

للمتباينات أهمية كبيرة في حياتنا اليومية، ويمكنُ عَنْ طريقها التعبيرُ عَنْ الحدِّ الأقصى والأدنى لكثيرٍ مِنَ المواقفِ، فمثلاً تحدّدُ إدارةُ السّيرِ الحدَّ الأقصى للسرعةِ المسموحِ بها على الطّرق؛ للحدِّ مِنَ الحوادثِ المرورية، وتقليلِ الأثرِ البيئيِّ لحركةِ المرورِ مِنَ ضوضاءِ السيّاراتِ والانبعاثاتِ.



سأتعلّم في هذه الوحدة:

- تعرّف مفهوم المتباينة.
- حلّ متبايناتٍ خطيّةٍ بمتغيّرٍ واحدٍ بخطوةٍ واحدةٍ، وتمثيل حلّها على خطّ الأعداد.
- حلّ متباينةٍ خطيّةٍ بمتغيّرٍ واحدٍ بأكثرَ مِنْ خطوةٍ، وتمثيل حلّها على خطّ الأعداد.

تعلمتُ سابقاً:

- ✓ المقارنة بين الأعداد الحقيقية، وترتيب مجموعةٍ مِنْها تنازلياً أو تصاعدياً.
- ✓ تعيين قيمٍ على خطّ الأعداد، واستعماله في إجراء عملياتٍ حسابيةٍ عليها.
- ✓ حلّ معادلاتٍ خطيّةٍ بمتغيّرٍ واحدٍ.



مشروع الوحدة: درجات الغليان والانصهار

4 أضيف عمودًا إلى الجدول؛ لأكتب فيه متباينات تمثل درجات الحرارة التي تكون عندها المادة سائلة.

5 أستعمل المعادلة $C = \frac{5(F-32)}{9}$ لكتابة المتباينات التي في الجدول باستعمال درجات الحرارة الفهرنهايتية، حيث C تمثل درجة الحرارة بالسليسيوس و F تمثل درجة الحرارة بالفهرنهايت، ثم أحل هذه المتباينات وأمثلها على خط الأعداد.

6 أبحث في شبكة الإنترنت عن درجات غليان كل من المواد التي اخترتها سابقًا، ثم أضيف عمودًا إلى الجدول وأكتب فيه درجات الغليان بالسليسيوس.

7 أستعمل المعادلة الواردة في النقطة 5 لكتابة متباينات لدرجات الغليان بالفهرنهايت، ثم أحلها وأمثل حلها على خط الأعداد.

8 أعد عرضًا تقديميًا يتضمن المواد التي اخترتها، وصورة لكل منها، والجدول الذي أعدته.

عرض النتائج:

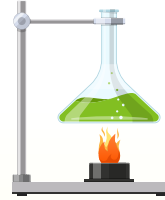
• أقدم أمام طلبة صفي العرض التقديمي الذي أعدته، مع توضيح الفرق بين درجات الانصهار والغليان.

أستعد ومجموعتي لتنفيذ مشروعنا الخاص الذي سنوظف فيه المتباينات؛ لنجد درجات الحرارة التي تكون عندها المواد صلبة أو سائلة أو في حالة الغليان.

خطوات تنفيذ المشروع:

1 أبحث في شبكة الإنترنت عن درجات انصهار مجموعة من المواد ضمن الشروط الآتية:

- مادة درجة انصهارها سالبة.
- مادتان درجتا انصهارهما أكثر من 100°C وأقل من 2000°C
- مادتان درجتا انصهارهما أكثر من 2000°C



2 أنشئ جدولًا أكتب فيه أسماء المواد ودرجات انصهار كل منها بالسليسيوس.

اسم المادة	درجة الانصهار $^{\circ}\text{C}$

3 أضيف عمودًا إلى الجدول؛ لأكتب فيه متباينات تمثل درجات الحرارة التي تكون عندها المادة صلبة.

أستكشف



ترصدُ كاميرا سرعة السيَّارات في أحدِ الشوارع، ومنْ تزيدُ سرعتهُ عنْ 90 km/h يعاقَبُ بمخالفةٍ مروريةٍ، ما الجملةُ الرياضيةُ التي تعبِّرُ عنْ الحدِّ الأقصى للسرعة المسموحِ بها في هذا الشارع؟

فكرة الدرس

أُعرِّفُ المتباينة، وأمثِّلها على خطِّ الأعداد.

المصطلحات

المتباينة، حلُّ المتباينة

المتباينة (inequality) جملةٌ رياضيةٌ تقارنُ بينَ مقدارين، وتشملُ أحدَ الرِّموزِ $<$, $>$, \leq , \geq .

رموزُ المتباينات				
الرمزُ	$<$	$>$	\leq	\geq
بالكلمات	• أصغرُ منْ	• أكبرُ منْ	• أصغرُ منْ أو يساوي	• أكبرُ منْ أو يساوي
	• يقلُّ عنْ	• يزيدُ على	• أقلُّ منْ أو يساوي	• أكثرُ منْ أو يساوي
	• أقلُّ منْ	• أكثرُ منْ	• على الأكثرِ	• على الأقلِّ
			• لا يزيدُ على	• لا يقلُّ عنْ

مثال 1

أكتبُ متباينةً تمثِّلُ كلَّ جملةٍ ممَّا يأتي:

2 عددٌ مطروحٌ منه 4 أكبرُ منْ 120

المتغيرُ: ليكنْ h يمثلُ العدد.

المتباينة: $h - 4 > 120$

4 عددٌ طلبة صفِّي لا يقلُّ عنْ 20

المتغيرُ: ليكنْ n يمثلُ عددَ طلبة صفِّي.

المتباينة: $n \geq 20$

1 عددٌ أصغرُ منْ 15

المتغيرُ: ليكنْ a يمثلُ العدد.

المتباينة: $a < 15$

3 كُتلتِي أقلُّ منْ أو تساوي 48 kg

المتغيرُ: ليكنْ w يمثلُ كُتلتِي.

المتباينة: $w \leq 48$

أتحقق من فهمي:



6 عدد مضاف إليه 10 أقل من -36

5 عدد أكبر من 100

8 عدد طلبة مدرستي لا يقل عن 200 طالب.

7 كتلة حقيتي أكبر من أو تساوي 10 kg

يمكن استعمال المتباينات للتعبير عن كثير من المواقف الحياتية.

مثال 2: من الحياة



أكتب المتباينة التي تمثل كل جملة مما يأتي:

1 **انتخاب:** يحق للمواطن الأردني التصويت في الانتخابات النيابية الأردنية إذا كان عمره لا يقل عن 18 عامًا.



بالكلمات عمر المواطن لا يقل عن 18

بالكلمات

ليكن x يمثل عمر المواطن.

المتغير

$$x \geq 18$$

المتباينة

2 **طيران:** يُسمح لراكب الدرجة السياحية على متن الخطوط الجوية الملكية الأردنية في الرحلة بين عمان وتونس حمل حقيبة واحدة لا تزيد كتلتها على 23 kg



بالكلمات كتلة الحقيبة لا تزيد على 23

بالكلمات

ليكن y يمثل كتلة الحقيبة.

المتغير

$$y \leq 23$$

المتباينة

✓ **أتحقق من فهمي:**

3 **رياضة:** يجب ألا يقل طول لاعب كرة السلة المحترف عن 170 cm

4 **سيارات:** يتسع خزان الوقود في السيارات الصغيرة 60 L على الأكثر.

حل المتباينة (solution of an inequality) هو أي عدد يجعل المتباينة صحيحة؛ لذا يمكن أن يكون للمتباينة أكثر من حل، ويمكنني التحقق من أن قيمة ما تمثل أحد حلول المتباينة بتعويضها عن المتغير الذي تحتويه المتباينة.

مثال 3

أبين ما إذا كانت القيمة المعطاة تمثل أحد حلول المتباينة أم لا في كل مما يأتي:

1 $2x - 1 > 5, x = 4$

$$2x - 1 > 5$$

أكتب المتباينة

$$2(4) - 1 > 5$$

أعوض عن x بـ 4

$$7 > 5 \quad \checkmark$$

أبسط

بما أن، $2x - 1 > 5$ صحيحة عند $x = 4$ ، فإن العدد 4 يمثل أحد حلول المتباينة.

2 $6 - y < 6, y = -2$

$$6 - y < 6$$

أكتب المتباينة

$$6 - (-2) < 6$$

أعوض عن y بـ -2

$$8 < 6 \quad \times$$

أبسط

بما أن، $6 - y < 6$ ليست صحيحة عند $y = -2$ ، فإن العدد -2 لا يمثل حلاً للمتباينة.

3 $12 \leq 9 - 3a, a = -1$

$$12 \leq 9 - 3a$$

أكتب المتباينة

$$12 \leq 9 - 3(-1)$$

أعوض عن a بـ -1

$$12 \leq 12 \quad \checkmark$$

أبسط

بما أن، $12 \leq 9 - 3a$ صحيحة عند $a = -1$ ، فإن العدد -1 يمثل أحد حلول المتباينة.

الوحدة 5

أتحقق من فهمي:



4 $2s + 5 > 10, s = 3$

5 $7 < 1 - 2d, d = 4$

6 $10 \geq 2 - 8k, k = -1$

يصعب أحياناً كتابة القيم جميعها التي تجعل المتباينة صحيحة؛ لذا يمكن تمثيل تلك القيم على خط الأعداد، ويكون ذلك بوضع دائرة مفتوحة (○) أو مغلقة (●) للدلالة على بداية القيم، ثم وضع سهم إلى اليمين أو اليسار؛ لإظهار اتجاه القيم.

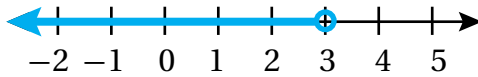
تُستعمل الدائرة المفتوحة إذا كان رمز المتباينة < أو >، وهذا يعني أن نقطة بداية القيم ليست ضمن حلول المتباينة، أما الدائرة المغلقة فتُستعمل إذا كان رمز المتباينة ≤ أو ≥، وهذا يعني أن نقطة بداية القيم ضمن حلول المتباينة.

مثال 4

أمثل كل متباينة مما يأتي على خط الأعداد:

1 $x < 3$

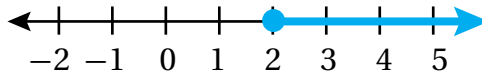
الدائرة المفتوحة تعني أن العدد 3 ليس ضمن حلول المتباينة.



أضع دائرة مفتوحة على العدد 3، ثم أرسم سهمًا باتجاه اليسار.

2 $y \geq 2$

الدائرة المغلقة تعني أن العدد 2 ضمن حلول المتباينة.



أضع دائرة مغلقة على العدد 2، ثم أرسم سهمًا باتجاه اليمين.

أتحقق من فهمي:



3 $a > 1$

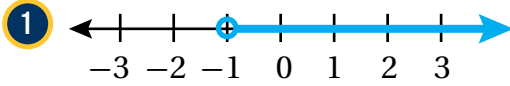
4 $z \geq -4$

5 $n < -3$

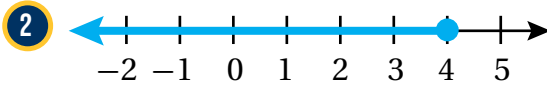
تعلّمتُ في المثال السابق تمثيل متباينة على خطّ الأعداد، ويمكنني أيضًا تحديد المتباينة من تمثيلها البياني.

مثال 5

أكتب المتباينة الممثلة على خطّ الأعداد في كلّ ممّا يأتي:

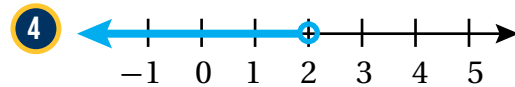
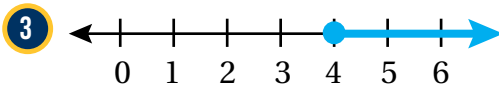


توجد دائرة مفتوحة عند العدد -1 واتّجاه السهم إلى اليمين، وهذا يدلّ على أنّ حلول المتباينة هي الأعداد الأكبر من -1 ، وباستعمال المتغير x فإنّ المتباينة هي: $x > -1$



توجد دائرة مغلقة عند العدد 4 واتّجاه السهم إلى اليسار، وهذا يدلّ على أنّ حلول المتباينة هي الأعداد الأقلّ من أو تساوي 4 ، وباستعمال المتغير k فإنّ المتباينة هي: $k \leq 4$

✓ **أتحقّق من فهمي:**



أكتب المتباينة التي تمثّل كلّ جملة ممّا يأتي:

1 عدد لا يقلّ عن 6

2 عمر حنين 7 سنوات على الأكثر.

3 بعد 3 سنوات من الآن يكون عمر ديمة 12 سنة على الأقلّ.

4 طول هاشم أقلّ من 150 cm

5 أقصى ارتفاع للسيارات التي تمرّ تحت هذا الجسر هو 5 m

6 عدد مطروح منه 5 أكبر من -8

7 ثلاثة أمثال عدد مضافاً إليه 10 أقلّ من أو يساوي 7

أتحارب
وأحل المسائل

الوحدة 5

جامعات: يحقُّ للطالب التقدم للالتحاق بكلية الصيدلة إذا كان معدُّه في امتحان الثانوية العامة لا يقلُّ عن 80% أكتب المتباينة التي تمثل هذه الجملة.



علوم: يبدأ الماء بالتحوّل من الحالة السائلة إلى الحالة الصلبة عند درجة حرارة 0°C أو أقل. أكتب المتباينة التي تمثل هذه الجملة.

صحة: يحتاج جسم الإنسان إلى 1600 سُعرة حرارية يوميًا على الأقل؛ ليقوم بوظائفه الحيوية. أكتب المتباينة التي تمثل هذه الجملة.

أبين ما إذا كانت القيمة المعطاة تمثل أحد حلول المتباينة أم لا في كلّ ممّا يأتي:

11 $3x + 1 > 5, x = 2$

12 $4z + 3 < -6, z = 0$

13 $\frac{8-u}{u} \geq -9, u = -1$

14 $18-n > 4, n = 12$

15 $5r \leq 35, r = 7$

16 $\frac{3m}{6} - 2 > 3, m = 8$

17 $-5 \div s < -1, s = 10$

18 $17 > 2y, y = 7$

أمثل كلّ متباينة ممّا يأتي على خطّ الأعداد:

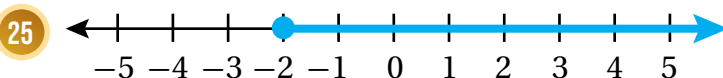
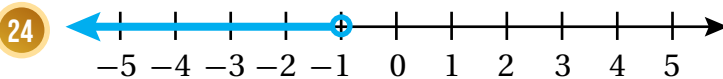
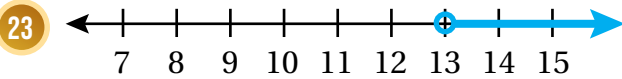
19 $y > -4$

20 $h < 3$

21 $n \leq 11$

22 $t \geq 9$

أكتب المتباينة الممثلة على خطّ الأعداد في كلّ ممّا يأتي:



معلومة

نقطة التجمّد هي النقطة التي يصبح السائل عندها صلبًا.

أتذكّر

أتبع أولويات العمليات الحسابية بعد تعويض القيمة المعطاة.



فيزياء: وفقًا لقوانين الفيزياء لا يمكن لأي جسم السير بسرعة أكبر من سرعة الضوء البالغة 300000 km/s تقريبًا. أكتب متباينة تعبر عن سرعة الأجسام مقارنةً بسرعة الضوء، وأمثلها على خط الأعداد.

أعود إلى فقرة (أستكشف) بداية الدرس، وأحل المسألة.

معلومة

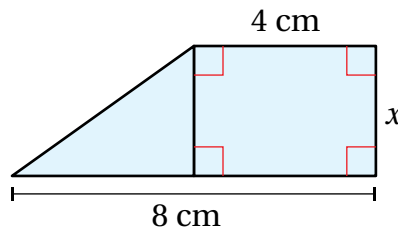
يمكن للعين البشرية رؤية الضوء الذي يتراوح طوله الموجي بين 380 و700 نانومتر، ويسمى هذا النطاق الطيف المرئي، وللحيوانات طيف مرئي آخر.

مهارات التفكير العليا

أكتشف الخطأ: تقول سارة: إن أكبر عدد كلي يحقق المتباينة $x < -3$ هو العدد -4 . أكتشف الخطأ في ما تقوله سارة، وأصححه.

تبرير: أكتب متباينة تعبر عن الجملة الآتية، مبررًا إجابتي:

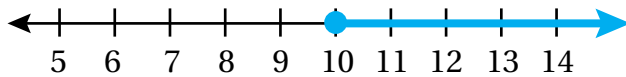
"مساحة الشكل الآتي لا تزيد على 18 cm^2 ".



أتذكر

لحساب مساحة الشكل المركب، أقسمه إلى أشكال بسيطة، كالمثلث والمربع والمستطيل، ثم أحسب مساحة كل من هذه الأشكال وأجمعها.

مسألة مفتوحة: أكتب موقفًا حياتيًا يمثل المتباينة الممثلة على خط الأعداد الآتي:



كيف أحدد ما إذا كان العدد يمثل أحد حلول المتباينة أم لا؟

أستكشف



قرص صلب سعة تخزينه 180 جيجابايت،
استعمل منها 112 جيجابايت، ما الحد
الأقصى لحجم البيانات التي يمكن
تخزينها على القرص؟

فكرة الدرس

أحل متباينات باستعمال خصائص
الجمع أو الطرح، وأمثل الحل على
خط الأعداد.

المصطلحات

متباينة مكافئة

تعلمت سابقاً استعمال خصائص المساواة لحل المعادلات، ويمكنني أيضاً حل المتباينة باستعمال خصائص المتباينات التي
يمكن تطبيقها لإيجاد متباينة مكافئة (equivalent inequality) للمتباينة الأصلية. والمتباينات المتكافئة هي متباينات لها
الحل نفسه.

خاصية الجمع للمتباينات

مفهوم أساسي

• **بالكلمات:** إذا أضيف العدد نفسه إلى كل من طرفي متباينة صحيحة، فإن المتباينة الناتجة تبقى صحيحة.

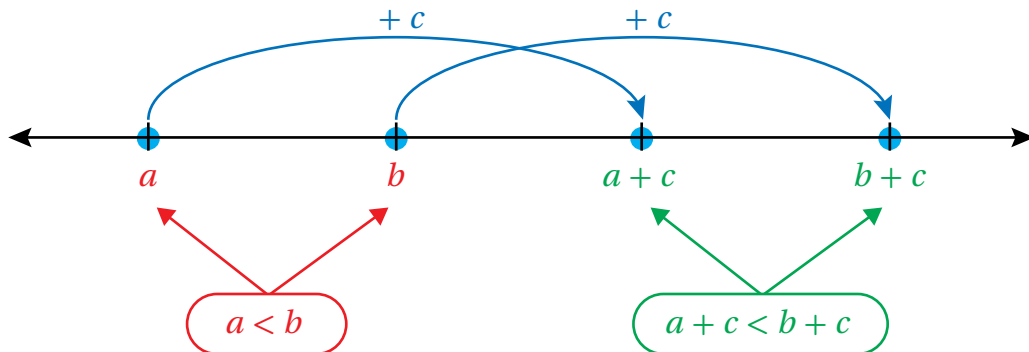
• **بالرموز:** العبارتان الآتيتان صحيحتان لأي أعداد حقيقية a و b و c :

• إذا كانت $a > b$ ، فإن $a + c > b + c$

• إذا كانت $a < b$ ، فإن $a + c < b + c$

تبقى هذه الخاصية صحيحة في حالتَي \leq و \geq

يوضح المخطط أدناه طريقة واحدة لتخيل خاصية الجمع للمتباينات عندما $c > 0$



مثال 1

أحل كل متباينة مما يأتي، وأمثل الحل على خط الأعداد، ثم أتحقق من صحته:

1 $x - 12 < -10$

$$x - 12 < -10$$

المتباينة الأصلية

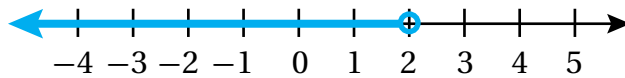
$$x - 12 + 12 < -10 + 12$$

أضيف 12 إلى طرفي المتباينة

$$x < 2$$

أبسط

إذن، الحل هو $x < 2$ ، وتمثيله على خط الأعداد على النحو الآتي:



أتحقق من صحة الحل:

لأتحقق من صحة الحل، أعوض بدلاً من x في المتباينة الأصلية عدداً أصغر من 2، مثلاً (-1) .

$$x - 12 < -10$$

المتباينة الأصلية

$$(-1) - 12 < -10$$

أعوض عن x بـ -1

$$-13 < -10 \quad \checkmark$$

أبسط

2 $7 \leq y - 4$

$$7 \leq y - 4$$

المتباينة الأصلية

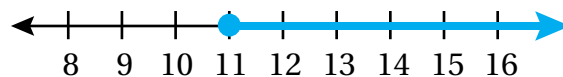
$$7 + 4 \leq y - 4 + 4$$

أجمع 4 إلى طرفي المتباينة

$$11 \leq y$$

أبسط

إذن، الحل هو $11 \leq y$ أو $y \geq 11$ ، وتمثيله على خط الأعداد على النحو الآتي:



الوحدة 5

أتحقق من صحة الحل:

لأتحقق من صحة الحل، أعوض بدلاً من y في المتباينة الأصلية عدداً أكبر من أو يساوي 11، مثلاً (20).

$$7 \leq y - 4$$

المتباينة الأصلية

$$7 \stackrel{?}{\leq} 20 - 4$$

أعوض عن y بـ 20

$$7 \leq 16 \quad \checkmark$$

أبسط

أتحقق من فهمي:



3 $x - 4 < 1$

4 $y - 6 \geq -10$

تعلمت في المثال السابق حل المتباينات باستعمال خاصية الجمع للمتباينات التي يمكن بها إيجاد متباينة مكافئة للمتباينة الأصلية، ويمكن أيضاً حل المتباينات باستعمال خاصية الطرح للمتباينات.

خاصية الطرح للمتباينات

مفهوم أساسي



• **بالكلمات:** إذا طرح العدد نفسه من طرفي متباينة صحيحة، فإن المتباينة الناتجة تبقى صحيحة.

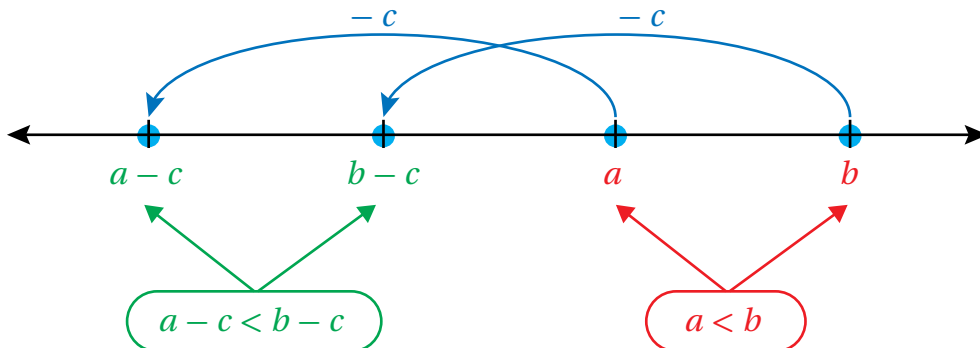
• **بالرموز:** العبارتان الآتيتان صحيحتان لأي أعداد حقيقية a و b و c :

• إذا كانت $a > b$ ، فإن $a - c > b - c$

• إذا كانت $a < b$ ، فإن $a - c < b - c$

تبقى هذه الخاصية صحيحة في حالتَي \leq و \geq

يوضح المخطط أدناه طريقة واحدة لتخيل خاصية الطرح للمتباينات عندما $c > 0$



مثال 2

أحل كل متباينة مما يأتي، وأمثل الحل على خط الأعداد، ثم أتحقق من صحته:

1 $m + 5 \geq 10$

$$m + 5 \geq 10$$

المتباينة الأصلية

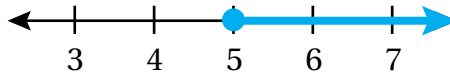
$$m + 5 - 5 \geq 10 - 5$$

أطرح 5 من طرفي المتباينة

$$m \geq 5$$

أبسط

إذن، الحل هو $m \geq 5$ ، وتمثله على خط الأعداد على النحو الآتي:



أتحقق من صحة الحل:

لأتحقق من صحة الحل، أعوض بدلاً من m في المتباينة الأصلية عدداً أكبر من أو يساوي 5، مثلاً (10).

$$m + 5 \geq 10$$

المتباينة الأصلية

$$10 + 5 \stackrel{?}{\geq} 10$$

أعوض عن m بـ 10

$$15 \geq 10 \quad \checkmark$$

أبسط

2 $a + \frac{1}{2} < 2$

$$a + \frac{1}{2} < 2$$

المتباينة الأصلية

$$a + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} < 2 - \frac{1}{2}$$

أطرح $\frac{1}{2}$ من طرفي المتباينة

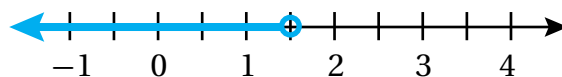
$$a < \frac{4}{2} - \frac{1}{2}$$

بتوحيد المقامات

$$a < \frac{3}{2}$$

أبسط

إذن، الحل هو $a < \frac{3}{2}$ ، وتمثله على خط الأعداد على النحو الآتي:



الوحدة 5

أتحقق من صحة الحل:

لأتحقق من صحة الحل، أعوض بدلاً من a في المتباينة الأصلية عدداً أصغر من $\frac{3}{2}$ ، مثلاً (0).

$$a + \frac{1}{2} < 2$$

المتباينة الأصلية

$$0 + \frac{1}{2} < 2$$

أعوض عن a بـ 0

$$\frac{1}{2} < 2 \quad \checkmark$$

أبسط

أتحقق من فهمي:



3 $2 + x \geq 6$

4 $5 > y + 12$

يمكن استعمال المتباينات وحلها في كثير من التطبيقات الحياتية.

مثال 3: من الحياة



كرة قدم: لعب أحد نوادي كرة القدم ثلاث مباريات في ثلاثة ملاعب مختلفة، وبجمهور يزيد على 25000 شخص. إذا كان عدد الجمهور في الملعب الأول 9500 شخص، وفي الملعب الثاني 7000 شخص، فما عدد الجمهور في الملعب الثالث؟

عدد الجمهور في الملعب الأول وعدد الجمهور في الملعب الثاني
وعدد الجمهور في الملعب الثالث يزيد على 25000

بالكلمات

ليكن x يمثل عدد الجمهور في الملعب الثالث.

المتغير

$$9500 + 7000 + x > 25000$$

المتباينة

$$9500 + 7000 + x > 25000$$

المتباينة الأصلية

$$16500 + x > 25000$$

أبسط

$$16500 - 16500 + x > 25000 - 16500$$

أطرح 16500 من طرفي المتباينة

$$x > 8500$$

أبسط

إذن، عدد الجمهور في الملعب الثالث أكثر من 8500 شخص.



✓ **أتحقّق من فهمي:**

سيّارات: تريدُ مَلِكُ شراءَ سيارَةٍ لا يقلُّ ثمنُها عنَ JD 15000، وقد وفّرتُ JD 13500، كم المبلغ المتبقي عليها لشراء السيارة؟

أُتدرب
وأحلّ المسائل

أحلّ كلّ متباينةٍ ممّا يأتي، وأمثّل الحلّ على خطّ الأعداد، ثمّ أتحقّق من صحّته:

1 $v - 6 < -3$

2 $y - 11 \geq 0$

3 $h - 7.8 > -2.8$

4 $0 \leq n - 8$

5 $k - 4 \geq -5$

6 $s - \frac{2}{3} < 4$

أحلّ كلّ متباينةٍ ممّا يأتي، وأمثّل الحلّ على خطّ الأعداد، ثمّ أتحقّق من صحّته:

7 $y + 5 < 11$

8 $-1 \geq 3 + b$

9 $8.1 < y + 6.1$

10 $2.4 \leq 6.4 + n$

11 $-8 \leq 8 + x$

12 $1 \frac{1}{4} + w > 3$

أكتبُ المتباينة التي تمثّل كلّ جملةٍ ممّا يأتي، ثمّ أحلّها:

عددٌ مضافٌ إليه 7 أكبر من 20

عددٌ مطروحٌ منه 9 أكبر من -5

العدد 6 أقل من أو يساوي مجموع عددي 15 و

تسويق: يخطّط مندوب مبيعات إحدى

شركات تصنيع الأدوية لتسويق 200 عبوة

دواءٍ على الأقل في أسبوع. إذا تمكّن من

تسويق 30 عبوة في اليوم الأول من الأسبوع، فكم عبوة يحتاج إلى تسويقها في الأيام

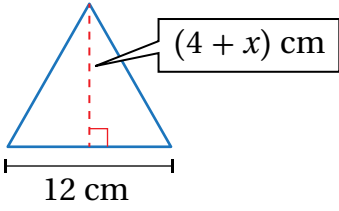
المتبقية من الأسبوع ليصل إلى هدفه؟

معلومة

مندوب المبيعات هو الشخص الذي يروّج منتجات الشركات، وعادةً يتقاضى أجرته كنسبة من مبيعاته؛ لتشجيعه على زيادة المبيعات، فكلّما زادت مبيعاته زادت أجرته.



الوحدة 5



هندسة: إذا كان طول قاعدة المثلث المجاور أقل من ارتفاعه، فما القيم الممكنة للمتغير x ؟

17

معلومة

السحالي من ذوات الدم البارد، فهي تعتمد على درجة حرارة الشمس لرفع درجة حرارة جسمها الداخلية، ولتحفيز عملية التمثيل الغذائي الخاص بها.

18

ميزانية شهرية: يتقاضى موظف راتباً شهرياً مقداره JD 560، يوفر منه JD 100 شهرياً، ويدفع JD 20 اشتراكاً شهرياً في أحد مراكز اللياقة البدنية ويصرف باقي الراتب. أكتب متباينة وأحلها لأجد الحد الأعلى للمبلغ الذي يمكن للموظف صرفه شهرياً.

19



زواحف: يحتاج حيوان أبو بريص الفهد إلى أن تكون درجة الحرارة في منطقة تعرضه للشمس 28°C على الأقل. إذا كانت درجة الحرارة الحالية 24°C ، فأكتب متباينة وأحلها لأجد كم يجب أن ترتفع درجة الحرارة لتلبي حاجة ذلك الحيوان.

20

أعود إلى فقرة (استكشف) بداية الدرس، وأحل المسألة.

مهارات التفكير العليا

21

مسألة مفتوحة: أكتب ثلاث متباينات مكافئة للمتباينة $y < -2$

22

أكتشف الخطأ: أنظر الحل الآتي، وأكتشف الخطأ الوارد فيه، وأصححه:



$$\begin{aligned} -10 + x &\geq -9 \\ -10 + 10 + x &\geq -9 \\ x &\geq -9 \end{aligned}$$

23

أكتب: كيف أستعمل خاصيتي الجمع والطرح للمتباينات في حل متباينة؟

أستكشف



حصل كمال على علامتي 93 ، 90 في الاختبارين:
الأول، والثاني، من مادة العلوم. ما الحد الأدنى
للعلامة التي يجب أن يحصل عليها في الاختبار
الثالث ليكون معدل علاماته 90 على الأقل؟

فكرة الدرس

أحل متباينات باستعمال خصائص
الضرب أو القسمة، وأمثلة الحل
على خط الأعداد.

تعلمت سابقاً استعمال خصائص المساواة لحل المعادلات، ومنها خاصية الضرب، ويمكنني أيضاً حل المتباينة باستعمال خاصية الضرب للمتباينات.

خاصية الضرب للمتباينات

مفهوم أساسي

الضرب في عدد موجب

• **بالكلمات:** إذا ضرب كل من طرفي متباينة صحيحة في عدد موجب، فإن المتباينة الناتجة تبقى صحيحة.

• **بالرموز:** العبارتان الآتيتان صحيحتان لأي عددين حقيقيين a و b ولأي $c > 0$:

• إذا كانت $a > b$ ، فإن $ac > bc$

• إذا كانت $a < b$ ، فإن $ac < bc$

الضرب في عدد سالب

• **بالكلمات:** إذا ضرب كل من طرفي متباينة صحيحة في عدد سالب، فإنه يتعين تغيير اتجاه رمز المتباينة لجعل المتباينة الناتجة صحيحة أيضاً.

• **بالرموز:** العبارتان الآتيتان صحيحتان لأي عددين حقيقيين a و b ولأي $c < 0$:

• إذا كانت $a > b$ ، فإن $ac < bc$

• إذا كانت $a < b$ ، فإن $ac > bc$

تبقى هذه الخاصية صحيحة في حالتَي \leq و \geq

أحل كل متباينة مما يأتي، وأمثل الحل على خط الأعداد، ثم أتحقق من صحته:

1 $\frac{x}{8} > -5$

$$\frac{x}{8} > -5$$

المتباينة الأصلية

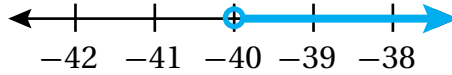
$$8 \left(\frac{x}{8} \right) > 8(-5)$$

أضرب طرفي المتباينة في 8

$$x > -40$$

أبسط

إذن، الحل هو $x > -40$ ، وتمثله على خط الأعداد على النحو الآتي:



أتحقق من صحة الحل:

لأتحقق من صحة الحل، أعوض بدلاً من x في المتباينة الأصلية عدداً أكبر من -40 ، مثلاً (0).

$$\frac{x}{8} > -5$$

المتباينة الأصلية

$$\frac{0}{8} > -5$$

أعوض عن x بـ 0

$$0 > -5 \quad \checkmark$$

أبسط

2 $\frac{y}{-3} \leq 4$

$$\frac{y}{-3} \leq 4$$

المتباينة الأصلية

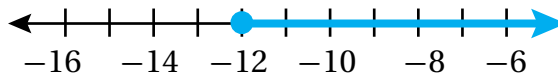
$$-3 \left(\frac{y}{-3} \right) \geq -3(4)$$

أضرب طرفي المتباينة في -3 ، وأغير اتجاه رمز المتباينة

$$y \geq -12$$

أبسط

إذن، الحل هو $x \geq -12$ ، وتمثله على خط الأعداد على النحو الآتي:



أتحقق من صحة الحل:

لأتحقق من صحة الحل، أعوض بدلاً من y في المتباينة الأصلية عدداً أكبر من أو يساوي -12 ، مثلاً (0).

$$\frac{y}{-3} \leq 4$$

المتباينة الأصلية

$$\frac{0}{-3} \stackrel{?}{\leq} 4$$

أعوض عن y بـ 0

$$0 \leq 4 \quad \checkmark$$

أبسط

أتحقق من فهمي:



3 $\frac{y}{3} > -1$

4 $-\frac{4}{7}m < 8$

إنَّ حلَّ المتباينات باستعمال خاصية القسمة مشابه لحلها باستعمال خاصية الضرب، حيث إنَّه عند قسمة طرفي المتباينة على عدد موجب يبقى اتجاه رمز المتباينة كما هو، أمَّا عند قسمة طرفي المتباينة على عدد سالب، فإنَّه يتعيَّن تغيير اتجاه رمز المتباينة.

خاصية القسمة للمتباينات

مفهوم أساسي



القسمة على عدد موجب

- **بالكلمات:** إذا قُسم كلٌّ من طرفي متباينة صحيحة على عدد موجب، فإنَّ المتباينة الناتجة تبقى صحيحة.
- **بالرموز:** العبارتان الآتيتان صحيحتان لأيَّ عددين حقيقيين a و b ولأيَّ $c > 0$:

$$\text{• إذا كانت } a > b, \text{ فإن } \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

$$\text{• إذا كانت } a < b, \text{ فإن } \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

القسمة على عدد سالب

- **بالكلمات:** إذا قُسم كلٌّ من طرفي متباينة صحيحة على عدد سالب، فإنَّه يتعيَّن تغيير اتجاه رمز المتباينة لجعل المتباينة الناتجة صحيحة أيضاً.
- **بالرموز:** العبارتان الآتيتان صحيحتان لأيَّ عددين حقيقيين a و b ولأيَّ $c < 0$:

$$\text{• إذا كانت } a > b, \text{ فإن } \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

$$\text{• إذا كانت } a < b, \text{ فإن } \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

تبقى هذه الخاصية صحيحة في حالتَي \leq و \geq

أحل كل متباينة مما يأتي، وأمثل الحل على خط الأعداد، ثم أتحقق من صحته:

1 $3m \leq -24$

$$3m \leq -24$$

المتباينة الأصلية

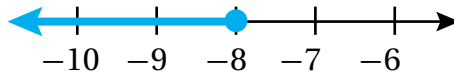
$$\frac{3m}{3} \leq \frac{-24}{3}$$

أقسم طرفي المتباينة على 3

$$m \leq -8$$

أبسط

إذن، الحل هو $m \leq -8$ ، وتمثله على خط الأعداد على النحو الآتي:



أتحقق من صحة الحل:

لأتحقق من صحة الحل، أعوض بدلاً من m في المتباينة الأصلية عدداً أقل من أو يساوي -8 ، مثلاً (-10) .

$$3m \leq -24$$

المتباينة الأصلية

$$3(-10) \stackrel{?}{\leq} -24$$

أعوض عن m بـ -10

$$-30 \leq -24 \quad \checkmark$$

أبسط

2 $-7k > -56$

$$-7k > -56$$

المتباينة الأصلية

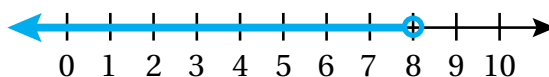
$$\frac{-7k}{-7} < \frac{-56}{-7}$$

أقسم طرفي المتباينة على -7 ، وأغير اتجاه رمز المتباينة

$$k < 8$$

أبسط

إذن، الحل هو $k < 8$ ، وتمثله على خط الأعداد على النحو الآتي:



أتحقق من صحة الحل:

لأتحقق من صحة الحل، أعوض بدلاً من k في المتباينة الأصلية عدداً أصغر من 8، مثلاً (1).

$$-7k > -56$$

المتباينة الأصلية

$$-7(1) > -56$$

أعوض عن k بـ 1

$$-7 > -56 \quad \checkmark$$

أبسط

أتحقق من فهمي:

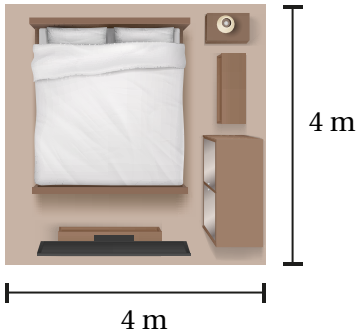


3 $4d < 8$

4 $-2y \leq -14$

يمكن استعمال المتباينات في كثير من التطبيقات الحياتية.

مثال 3: من الحياة



سجّاد: تملك سارة JD 100، وترغب بشراء سجّادة جديدة تغطي أرضية غرفتها المبيّنة أبعادها في الشكل المجاور. أكتب متباينة وأحلّها لتمثّل ثمن المتر المربع الواحد من السجّاد الذي يمكن لسارة أن تشتريه.

بما أن أرضية الغرفة مربعة الشكل، فإنه يمكن إيجاد مساحتها على النحو الآتي:

$$A = s^2 = 4^2 = 16$$

إذن، مساحة أرضية الغرفة 16 m^2

وبما أن سارة ترغب بشراء سجّادة تغطي أرضية الغرفة، فإن مساحة هذه السجّادة يجب أن تكون 16 m^2 ولايجاد ثمن السجّادة أضرب مساحتها في ثمن المتر المربع الواحد من السجّاد.

سعر السجّادة أقل من أو يساوي JD100

بالكلمات

ليكن x ثمن المتر المربع الواحد من السجّاد، إذن سعر السجّادة $16x$

المتغير

$$16x \leq 100$$

المتباينة

الوحدة 5

$$16x \leq 100$$

$$\frac{16x}{16} \leq \frac{100}{16}$$

$$x \leq 6.25$$

المتباينة الأصلية

أقسم طرفي المتباينة على 16

أبسط

إذن، يمكن لسارة شراء سجادة ثمن المتر المربع الواحد منها على الأكثر JD 6.25.

أتحقق من فهمي:



عمل: يتقاضى أحمد JD 2.5 عن كل ساعة عمل، أكتب متباينة وأحلها؛ لإيجاد عدد الساعات التي يجب أن يعمل فيها حتى يتقاضى JD 400 على الأقل.

أدرب
وأحل المسائل



أحل كل متباينة مما يأتي، وأمثل الحل على خط الأعداد، ثم أتحقق من صحته:

1 $\frac{u}{3} > -2$

2 $-4x \leq 12$

3 $\frac{1}{6}t < -\frac{1}{3}$

4 $-\frac{2}{5}w \geq 4$

5 $\frac{n}{5} \leq 0.8$

6 $-5 > \frac{c}{-4.5}$

أحل كل متباينة مما يأتي، وأمثل الحل على خط الأعداد، ثم أتحقق من صحته:

7 $-13x \geq 26$

8 $-20 \leq 10n$

9 $5b > -15$

10 $144 < 12d$

11 $-3m > -33$

12 $-3.9c \leq 43.68$

أكتب متباينة تمثل كل جملة مما يأتي، ثم أحلها:

14 عدد مقسوم على 4 لا يزيد على 8

13 خمسة أمثال عدد أقل من 45

16 عدد مقسوم على 2 لا يقل عن 5

15 ثلاثة أمثال عدد أكبر من -18

17 **مدارس:** مدرسة أساسية فيها 275 طالبًا ثلاثة أخصائهم على الأقل في الصفوف الأساسية الدنيا. أكتب متباينة وأحلها لأجد أقل عدد ممكن من الطلبة في الصفوف الأساسية الدنيا في هذه المدرسة.



18 **حديقة:** يريد طارق تبليط منطقة مستطيلة الشكل في حديقة منزله مساحتها 15 m^2 ، ويملك فقط JD 75، أكتب متباينة وأحلها؛ لتمثل ثمن المتر المربع الواحد من البلاط الذي يمكن لطارق أن يشتريه.

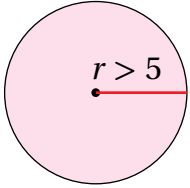
أفكر

بعض أنواع البلاط مربع الشكل أو سداسي منتظم، فهل يمكن أن يكون البلاط خماسيًا منتظمًا؟

19 أعود إلى فقرة (أستكشف) بداية الدرس، وأحل المسألة.

مهارات التفكير العليا

20 **مسألة مفتوحة:** أكتب متباينة يمكن حلها بالقسمة على عدد سالب وحلها $x \geq \frac{1}{4}$



21 **تبرير:** أكتب متباينة وأحلها؛ لتمثل المحيط الممكن للدائرة المجاورة، وأبرر إجابتي.

أتذكر

يمكن إيجاد محيط الدائرة C باستعمال الصيغة: $C = 2\pi r$ ، حيث r طول نصف قطر الدائرة.

22 **أكتشف الخطأ:** أنظر الحل الآتي، وأكتشف الخطأ الوارد فيه، ثم أصححه.

X

$$-6 > \frac{2}{3}x$$

$$\frac{3}{2}(-6) < \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}x\right)$$

$$-\frac{18}{2} < x$$

$$-9 < x$$

23 **أكتب:** كيف أستعمل خاصيتي الضرب والقسمة للمتباينات في حل متباينة؟

أستكشف



فكرة الدرس

أحل متباينات باستعمال أكثر من خطوة، وأمثل الحل على خط الأعداد.



تبلغ كتلة جهاد 95 kg، ويريد إنقاصها إلى أقل من 80 kg، ويمكنه أن يفقد ما معدله 1.5 kg من كتلته أسبوعياً باتباع حمية غذائية معينة. كم أسبوعاً يلزم جهاداً للوصول إلى هدفه؟

يمكن حل المتباينات التي تحتوي أكثر من عملية بنفس طريقة حل المتباينات التي تحتوي عملية واحدة، وذلك باستعمال خصائص المتباينات لتحويل المتباينة الأصلية إلى متباينة أبسط مكافئة لها مروراً بسلسلة من المتباينات المتكافئة.

مثال 1

أحل كل متباينة مما يأتي، وأمثل الحل على خط الأعداد، ثم أتحقق من صحته:

1 $5y - 8 < 12$

$$5y - 8 < 12$$

المتباينة الأصلية

$$5y - 8 + 8 < 12 + 8$$

أجمع 8 لطرفي المتباينة

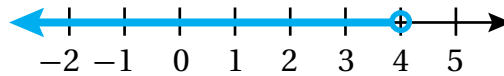
$$\frac{5y}{5} < \frac{20}{5}$$

أقسم طرفي المتباينة على 5

$$y < 4$$

أبسط

إذن، الحل هو $y < 4$ ، وتمثيله على خط الأعداد على النحو الآتي:



أتحقق من صحة الحل:

لأتحقق من صحة الحل، أعوض بدلاً من y في المتباينة الأصلية عدداً أقل من 4، مثلاً (0).

$$5y - 8 < 12$$

المتباينة الأصلية

$$5(0) - 8 < 12$$

أعوض عن y بـ 0

$$-8 < 12 \quad \checkmark$$

أبسط

2 $-7b + 19 < -16$

$$-7b + 19 < -16$$

المتباينة الأصلية

$$-7b + 19 - 19 < -16 - 19$$

أطرح 19 من طرفي المتباينة

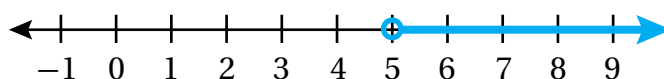
$$\frac{-7b}{-7} > \frac{-35}{-7}$$

أقسم طرفي المتباينة على -7، وأغيّر اتجاه رمز المتباينة

$$b > 5$$

أبسط

إذن، الحل هو $b > 5$ ، وتمثيله على خط الأعداد على النحو الآتي:



أتحقق من صحة الحل:

لأتحقق من صحة الحل، أعوض بدلاً من b في المتباينة الأصلية عدداً أكبر من 5، مثلاً (10).

$$-7b + 19 < -16$$

المتباينة الأصلية

$$-7(10) + 19 < -16$$

أعوض عن b بـ 10

$$-51 < -16 \quad \checkmark$$

أبسط

أتحقق من فهمي:

3 $2x + 6 \leq 14$

4 $-3x + 7 > -5$

تحتوي بعض المتباينات متغيرات في طرفيها، وفي هذه الحالة نحتاج أولاً إلى تجميع الحدود التي تحتوي متغيرات في طرف واحد من المتباينة، والحدود الثابتة في الطرف الآخر، ثم حل المتباينة.

مثال 2

أحل المتباينة: $6x - 5 \geq 2x + 11$ ، وأمثل الحل على خط الأعداد، ثم أتحقق من صحته:

$$6x - 5 \geq 2x + 11$$

المتباينة الأصلية

$$6x - 5 + 5 \geq 2x + 11 + 5$$

أجمع 5 لطرفي المتباينة

$$6x - 2x \geq 2x - 2x + 16$$

أطرح $2x$ من طرفي المتباينة

$$\frac{4x}{4} \geq \frac{16}{4}$$

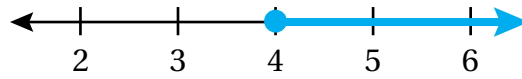
أقسم طرفي المتباينة على 4

$$x \geq 4$$

أبسط

الوحدة 5

إذن، الحل هو $x \geq 4$ ، وتمثيله على خط الأعداد على النحو الآتي:



أتحقق من صحة الحل:

لأتحقق من صحة الحل، أعوض بدلاً من x في المتباينة الأصلية عدداً أكبر من أو يساوي 4، مثلاً (5).

$$6x - 5 \geq 2x + 11$$

المتباينة الأصلية

$$6(5) - 5 \geq 2(5) + 11$$

أعوض عن x بـ 5

$$25 \geq 21 \quad \checkmark$$

أبسط

أتحقق من فهمي:

أحل المتباينة: $5w - 7 > 3w + 2$ ، وأمثل الحل على خط الأعداد، ثم أتحقق من صحته.

عند حل متباينات تحتوي أقواساً، أستخدم خاصية التوزيع للتخلص من الأقواس أولاً، ثم أحل المتباينة.

مثال 3

أحل المتباينة: $3(t + 1) > 4t - 5$

$$3(t + 1) > 4t - 5$$

المتباينة الأصلية

$$3t + 3 > 4t - 5$$

خاصية التوزيع

$$3t + 3 - 3 > 4t - 5 - 3$$

أطرح 3 من طرفي المتباينة

$$3t - 4t > 4t - 4t - 8$$

أطرح $4t$ من طرفي المتباينة

$$\frac{-t}{-1} < \frac{-8}{-1}$$

أقسم طرفي المتباينة على -1 ، وأغير اتجاه رمز المتباينة

$$t < 8$$

أبسط

إذن، الحل هو $t < 8$

أتحقق من فهمي:

أحل المتباينة: $15 \leq 5 - 2(4m + 7)$

في بعض الأحيان، يعطي حل المتباينة جملةً رياضيةً صحيحةً دائماً، مثل $5 < 8$ ، وفي هذه الحالة فإنَّ الحلَّ هوَّ جميعُ الأعدادِ الحقيقية، وفي أحيانٍ أخرى يعطي حلَّ المتباينة جملةً رياضيةً غيرَ صحيحةٍ أبداً مثل $7 < 1$ ، وهذا يعني أنَّه لا يوجد حلٌّ للمتباينة.

مثال 4

أحلُّ كلاً مِنَ المتبايناتِ الآتية:

1 $14 + 6b > 2(5 + 3b)$

$$14 + 6b > 2(5 + 3b)$$

المتباينة الأصلية

$$14 + 6b > 10 + 6b$$

خاصية التوزيع

$$14 + 6b - 6b > 10 + 6b - 6b$$

أطرح $6b$ مِنْ طرفي المتباينة

$$14 > 10$$

أبسط

بما أنَّ المتباينة $14 > 10$ صحيحة دائماً مهما كانت قيمة b ، فإنَّ حلَّ المتباينة $(14 + 6b > 2(5 + 3b))$ هوَّ جميعُ الأعدادِ الحقيقية.

2 $5 - 7m < m + 3 - 8m$

$$5 - 7m < m + 3 - 8m$$

المتباينة الأصلية

$$5 - 7m < 3 - 7m$$

أبسط

$$5 - 7m + 7m < 3 - 7m + 7m$$

أجمع $7m$ إلى طرفي المتباينة

$$5 < 3$$

أبسط

بما أنَّ المتباينة $5 < 3$ غيرَ صحيحةٍ أبداً مهما كانت قيمة m ، فإنَّ المتباينة $(5 - 7m < m + 3 - 8m)$ ليس لها حلٌّ.

أتحقق من فهمي: 

3 $12 - 8h \leq 2(6 - 4h)$

4 $3(2 + m) > 5m + 9 - 2m$

يمكن استعمال المتباينات التي يحتاج حلها إلى أكثر من خطوة في حل مسائل حياتية.

مثال 5: من الحياة



مساعد: يبلغ الحد الأقصى لحمولة مصعد في البناية التي يسكن فيها هشام 400 kg إذا أراد هشام تحميل مجموعة من الصناديق كتلة الواحد منها 20 kg، فما أكبر عدد من الصناديق يمكن له تحميلها في المصعد بأمان؟ علماً بأن كتلة هشام 80 kg

كتلة هشام وكتلة الصناديق أقل من أو يساوي 400

بالكلمات

ليكن x عدد الصناديق، إذن كتلة الصناديق $20x$

المتغير

$$80 + 20x \leq 400$$

المتباينة

$$80 + 20x \leq 400$$

المتباينة الأصلية

$$80 - 80 + 20x \leq 400 - 80$$

أطرح 80 من طرفي المتباينة

$$\frac{20x}{20} \leq \frac{320}{20}$$

أقسم طرفي المتباينة على 20

$$x \leq 16$$

أبسط

إذن، يمكن لهشام تحميل 16 صندوقاً كحد أقصى في المصعد.

أتحقق من فهمي:



تسويق: ترغب ريم في الإعلان عن منتجات شركتها على موقع إلكتروني مقابل JD 10 شهرياً، إضافة إلى JD 0.05 عن كل من يزور موقع الإعلان. أجد أقل عدد من الزيارات الشهرية لموقع الإعلان ليكون المبلغ الذي يتقاضاه الموقع الإلكتروني من شركة ريم JD 100 على الأقل.

أحل كل متباينة مما يأتي، وأمثلة الحل على خط الأعداد، ثم أتحقق من صحته:

1 $3x - 2 < 13$

2 $-6 > 3 - 3x$

3 $-5 \geq 4x + 7$

4 $5 - 2x < 17$

5 $7b - 4 \leq 10$

6 $-6g + 2 > 20$

أحل كلًا من المتباينات الآتية، وأتحقق من صحة الحل:

7 $3y + 6 < 2y - 8$

8 $6x + 10 \leq 2(7 - x)$

9 $3(x + 1) > 10 + 2x$

10 $2(7 - 3a) \leq 14 - 6a$

11 $x - 4 - 7x > 1 - 6x$

12 $8.1x + 1 > 8.1x - 10$

13 $\frac{x}{2} + 4 < 7$

14 $5w - 7 \leq 3w + 4$

15 $2(4x - 1) \leq 3(x + 4)$

16 $\frac{2t - 2}{7} > 4$

17 $3(x - 2) < 15$

18 $2(4t - 3) \geq 36$

19 $9h + 8 - 3h \geq 2(3h + 1) + 6$

20 $n - 1 > 3n + 4 - 2n$

أتذكر

أستعمل أولاً خاصية التوزيع للتخلص من الأقواس في طرفي المتباينة، ثم أحل المتباينة.

أكتب متباينة تمثل كل جملة مما يأتي، ثم أحلها:

21 ثلثا عدد مطروحاً منه 5 لا يزيد على 15

22 أربعة أمثال عدد مضافاً إليه 5 أكبر من 2

23 تجارة: يمتلك كرمٌ معملًا لإنتاج الطاولة تكلفته تشغيله الأسبوعية JD 270، إضافةً إلى JD 60 لإنتاج الطاولة الواحدة. يبيع كرمٌ الطاولة الواحدة بمبلغ JD 150. أكتب متباينةً يمكن استخدامها لتحديد عدد الطاولة التي يجب إنتاجها وبيعها لتحقيق ربح أسبوعي، وأحل المتباينة.



24 علوم: إذا كانت C تمثل درجة الحرارة بالسليسيوس و F تمثل درجة الحرارة بالفهرنهايت و $C = \frac{5(F - 32)}{9}$ ، فأكتب متباينةً يمكن استعمالها لأجد درجات الحرارة بالفهرنهايت التي يكون عندها الذهب صلبًا، ثم أحلها، علمًا بأن درجة انصهار الذهب 1064°C

أتعلم

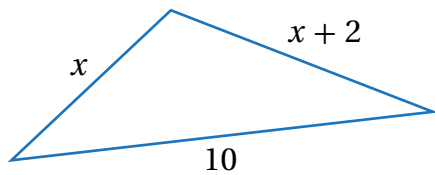
درجة الانصهار هي الدرجة التي تتغير عندها المادة من الحالة الصلبة إلى الحالة السائلة.

مهارات التفكير العليا

تحد: أحل كلاً من المتباينات الآتية:

25 $25 + \frac{2x}{3} > 35 - x$

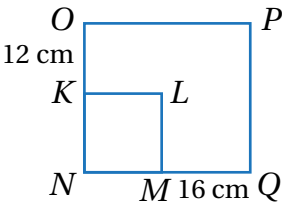
26 $\frac{3x}{4} + 5 \leq \frac{1}{2} - 6x$



27 تبرير: اعتمادًا على الشكل المجاور، أجد أقل قيمة لـ x ، علمًا بأن x عدد كلي.

إرشاد

طول أي ضلع في مثلث أصغر من مجموع طولي الضلعين الآخرين.



28 تحد: تمددت أضلاع المربع $KLMN$ فشكّل المستطيل $NOPQ$ كما في الشكل المجاور، إذا كان محيط المستطيل لا يقل عن مثلي محيط المربع، فأجد أكبر طول ممكن لضلع المربع.

أكتب كيف أحل متباينة تحتوي متغيرات في طرفيها؟

اختبار الوحدة

أختارُ رمزَ الإجابة الصحيحة لكلِّ ممَّا يأتي:

1 المتباينة التي تمثل الجملة (مثلاً x مضافاً إليه 4 أقلُّ من 7) هي:

a) $2(x + 4) < 7$ b) $2x + 4 > 7$

c) $2x + 4 < 7$ d) $2x + 4 \leq 7$

2 التمثيل البياني الآتي يمثل حلَّ المتباينة:



a) $x > 6$ b) $x < 6$

c) $x \leq 6$ d) $x \geq 6$

3 أيُّ الأعداد الآتية يعدُّ أحد حلول المتباينة $15 - 6y \leq 9$ ؟

a) -1 b) 1

c) 0 d) -2

4 حلُّ المتباينة $6y < \frac{3}{4} - 6$ هو:

a) $y < -\frac{1}{8}$ b) $y > -\frac{1}{8}$

c) $y > -\frac{9}{2}$ d) $y > -\frac{2}{9}$

5 المتباينة $-\frac{1}{2}y \geq -\frac{3}{2}$ تكافئ:

a) $y \leq \frac{3}{4}$ b) $y \leq \frac{4}{3}$

c) $y \leq -3$ d) $y \leq 3$

6 حلُّ المتباينة $5n - 12 > 2(n + 9)$ هو:

a) $n > 6$ b) $n > 3$

c) $n > 10$ d) $n < 10$

7 حلُّ المتباينة $12 < 18 - 2x$ هو:

a) $x < 6$ b) $x < 15$

c) $x > 3$ d) $x < 3$

أكتب متباينة تمثل كل جملة ممَّا يأتي، ثمَّ أحلّها:

8 عددٌ ما مطروح منه 15 أقلُّ من 7

9 جمعُ اثنين إلى ناتج قسمة عددٍ على -6 يساوي 8 على الأكثر.

10 مجموع عددٍ و 9 أقلُّ من -1

11 خمسُ عددٍ أقلُّ من 10

12 أربعة أمثال عددٍ مضافاً إلى 8 أقلُّ من 20

13 خمسة أمثال مجموع عددٍ مع 6 أكبر من 20

أحلُّ كلَّ متباينة ممَّا يأتي، وأمثلة الحلَّ على خطِّ الأعداد، ثمَّ اتَّحَقَّقْ مِنْ صِحَّتِهِ:

14 $x - 5 < 6$

15 $3x > 21$

16 $x + 4 \leq 7$

17 $t + 5 > 3$

18 $p + 12 \geq 2$

19 $2x - 3 < 7$

20 $\frac{x}{2} + 4 > 5$

21 $\frac{y}{5} + 6 \leq 3$

22 $6 \geq 9 - x$

23 $10 - 2x \leq 3$

32 ما أصغر عددٍ كليٍّ يحقق المتباينة $-5 < n$ ؟

- a) -1 b) 0
c) 1 d) 2

33 أي المتباينات تكافئ المتباينة $w > 4$ ؟

- a) $w < 4$ b) $-4 < w$
c) $w < -4$ d) $-w < -4$

34 قرّرت إدارة أحد المطارات صيانة أحد مدارجها البالغ طوله 456 m، إذا أنجز أقل من ثلث العمل في المرحلة الأولى، فإن المتباينة التي تمثل عدد الأمتار التي ما زالت تحتاج للصيانة هي:

- a) $d > 304$ b) $d \leq 304$
c) $d \geq 304$ d) $d < 304$



35 تكلفة الدقيقة الواحدة من المكالمات الدولية على الهاتف النقال لسمير 8 قروش. إذا كان الحد الأعلى للمبلغ الذي يمكن أن يصرفه سمير على مكالمات دولية JD 2.4 فما المتباينة التي تستعمل لإيجاد مدة المكالمات؟

- a) $0.08 \text{ m} \leq 2.4$ b) $0.08 \text{ m} \geq 2.4$
c) $0.08 \leq 2.4 \text{ m}$ d) $0.08 \geq 2.4 \text{ m}$

24 يتقاضى موظف مبيعات في أحد المراكز التجارية مبلغ JD 75 أسبوعياً، إضافة إلى 4% من قيمة مبيعاته. يخطط هذا الموظف ألا يقل دخله هذا الأسبوع عن JD 95، أجد الحد الأدنى للمبيعات التي تحقق هدفه.

أحلّ كلاً من المتباينات الآتية، وأتحقق من صحة الحل:

25 $3 + \frac{r}{-4} \geq 6$

26 $2 > -3t - 10$

27 $5x - 12 < 3x - 4$

28 $2(k-5) < 2k + 5$

29 $2(5z - 20) < -3(4-z)$

30 مساعدات: تخطط جمعية خيرية لإقامة بازارٍ تباع فيه أطباقاً من الطعام وتوزيع ريع مبيعاته على عائلات فقيرة. إذا كان سعر الطبق الواحد JD 1.25 وتخطط الجمعية لجمع ما لا يقل عن JD 400، فأجد عدد الأطباق التي يجب بيعها في البازار لتحقيق الجمعية هدفها.

تدريب على الاختبارات الدولية

31 حل المتباينة $-18 < u - 13$ هو:

- a) $u < -5$ b) $u > 5$
c) $u > -5$ d) $u < 5$

أنظمة المعادلات الخطية

ما أهمية هذه الوحدة؟

يمكنُ نمذجةُ مواقفَ حياتيةٍ عديدةٍ باستعمالِ معادلتينِ خطيتينِ بمتغيرين، مثلَ تغيّر الطّول، وتغيّر درجات الحرارة في أثناء اليوم، وتغيّر ارتفاعِ ما، فمثلاً يساعدُ حلُّ نظامِ المعادلاتِ على تحديدِ الوقتِ الذي يصبحُ فيه منطادانِ على الارتفاعِ نفسه إذا كانَ معدّلُ التغيّر في ارتفاعيهما مختلفاً.



سأتعلّم في هذه الوحدة:

- حلّ نظامِ معادلاتِ خطيّة بمتغيرين بيانياً.
- حلّ نظامِ معادلاتِ خطيّة بمتغيرين بالتعويض.
- حلّ نظامِ معادلاتِ خطيّة بمتغيرين بالحذف.

تعلمت سابقاً:

- ✓ تعيين إحداثيّ نقطة في المستوى الإحداثيّ.
- ✓ حلّ المعادلة الخطيّة بمتغير واحد.
- ✓ كتابة معادلة المستقيم بصيغة الميل والمقطع.



مشروع الوحدة: الأشجار سريعة النمو

4 أجد متى يصبح طول الشجرتين في كل نظام معادلات كوّنته في الخطوة (2) متساوياً، وذلك بحل النظام بيانياً وجبرياً باستعمال طريقتي التعويض والحذف، مبرراً إجابتي.

5 أستعمل برمجة جيو جيرا لحل أنظمة المعادلات الخطية والتحقق من صحة الحل.

6 أعد مطوية من 4 صفحات، أدرج في كل صفحة منها صورة لإحدى الأشجار الأربع ومعلومات عنها.

عرض النتائج:

• أعرض المطوية أمام طلبة صفّي، مع توضيح المعادلات التي كوّنتها لأطوال الأشجار.

• أطلب إلى زملائي / زميلاتي في المجموعات الأخرى حل أنظمة المعادلات التي كوّنتها، ثم أعرض لهم الحل الجبري والبياني.



أستعدّ ومجموعتي لتنفيذ مشروعنا الخاص لكتابة معادلات خطية تمثل نمو أشجار سريعة النمو، وتكوين أنظمة معادلات منها، وحلها.

خطوات تنفيذ المشروع:

1 أبحث في شبكة الإنترنت عن 4 أشجار سريعة النمو وأجد معدل نمو كل منها، مع ضرورة الانتباه لتوحيد وحدات الزمن، ووحدات الطول للأشجار جميعها.

2 أكتب أربع معادلات خطية لأطوال الأشجار الأربع بالنسبة للزمن معتمداً على معدل النمو وفق الشروط الآتية:

• أفترض طولاً أولياً للشجرتين ذواتي معدل النمو الأقل على أن يكون أكثر من 2 m

• أفترض طولاً أولياً للشجرتين ذواتي معدل النمو الأعلى على أن يكون أقل من 1 m

3 أستعمل المعادلات الأربع الناتجة في الخطوة (2) لأكون 4 أنظمة معادلات خطية، كل نظام منها مكون من معادلتين خطيتين، إحداها من الشجرتين ذواتي معدل النمو الأعلى والأخرى من الشجرتين ذواتي معدل النمو الأقل.



أستكشف

شجرة طولها 0.6 m ويزداد طولها بمعدل ثابت مقداره 0.3 m في السنة، وشجرة أخرى طولها 1.8 m ويزداد طولها بمعدل ثابت مقداره 0.15 m لكل سنة. بعد كم سنة يصبح للشجرتين الطول نفسه؟

فكرة الدرس

أحل نظام معادلات خطية مكوناً من معادلتين خطيتين بيانياً.

المصطلحات:

نظام المعادلات الخطية، حل نظام المعادلات الخطية.

يتكوّن نظام المعادلات الخطية (system of linear equations) من معادلتين خطيتين أو أكثر لها المتغيرات نفسها، وفي ما يأتي مثال على نظام مكون من معادلتين خطيتين:

$$y = 2x + 1$$

المعادلة 1

$$y = x - 3$$

المعادلة 2

حل نظام المعادلات الخطية (solution of a system of linear equations) بمتغيرين هو زوج مرتب يحقق كل معادلة في النظام.

مثال 1

أحدّد ما إذا كان الزوج المرتب يمثل حلاً لنظام المعادلات الخطية المعطى في كل مما يأتي:

1 (4, 1); $x + 2y = 6$

$$x - y = 3$$

أعوّض الزوج المرتب (4, 1) في كلا المعادلتين حيث $x = 4$ و $y = 1$

المعادلة 2

$$x - y = 3$$

$$4 - 1 \stackrel{?}{=} 3$$

$$3 = 3 \quad \checkmark$$

المعادلة 1

$$x + 2y = 6$$

$$(4) + 2(1) \stackrel{?}{=} 6$$

$$6 = 6 \quad \checkmark$$

بما أن الزوج المرتب (4, 1) يمثل حلاً لكلا المعادلتين، إذن (4, 1) يمثل حلاً لنظام المعادلات الخطية.

الوحدة 6

2 (1, -2); $2x + y = 0$
 $-x + 2y = 5$

أعوّض الزوج المرتّب في كلا المعادلتين حيث $x = 1$ و $y = -2$

المعادلة 2

$$\begin{aligned} -x + 2y &= 5 \\ -(1) + 2(-2) &\stackrel{?}{=} 5 \\ -5 &\neq 5 \quad \times \end{aligned}$$

المعادلة 1

$$\begin{aligned} 2x + y &= 0 \\ 2(1) + (-2) &\stackrel{?}{=} 0 \\ 0 &= 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

ألاحظ أنّ الزوج المرتّب (1, -2) يمثل حلاً للمعادلة الأولى، ولكنه لا يمثل حلاً للمعادلة الثانية، إذن (1, -2) لا يمثل حلاً لنظام المعادلات الخطية.

أتحقّق من فهمي:



3 (1, 3); $2x + y = 5$
 $-2x + y = 1$

4 (-1, 2); $2x + 5y = 8$
 $3x - 2y = 5$

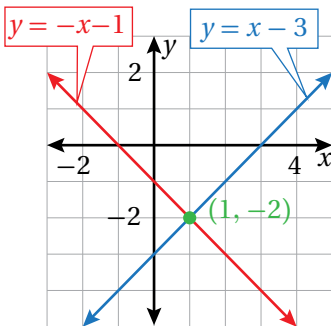
إحدى طرائق حلّ نظام معادلات خطية مكوّن من معادلتين خطيتين هي تمثيلهما في المستوى الإحداثي نفسه، وإيجاد النقطة التي يتقاطع عندها المستقيمان والتي تمثل حلاً للنظام.

مثال 2

أحلّ نظام المعادلات الخطية الآتي بيانيًا:

$$y = x - 3$$

$$y = -x - 1$$



الخطوة 1 أمثل المعادلتين في المستوى الإحداثي نفسه.

ألاحظ أنّ كلا المعادلتين مكتوبتان بصيغة الميل والمقطع؛ لذا يمكن تمثيلهما باستعمال المقطع y والميل.

الخطوة 2 أحدد نقطة تقاطع المستقيمين.

ألاحظ من التمثيل البياني أنّ المستقيمين يتقاطعان في النقطة (1, -2)

الخطوة 3 أنصحق من صحّة الحلّ.

أنصحق من أن الزوج المرتب $(1, -2)$ يمثّل حلّاً لِكِلَا المعادلتين:

المعادلة 2

$$y = -x - 1$$

$$-2 \stackrel{?}{=} -(1) - 1$$

$$-2 = -2 \quad \checkmark$$

المعادلة 1

$$y = x - 3$$

$$-2 \stackrel{?}{=} 1 - 3$$

$$-2 = -2 \quad \checkmark$$

إذن، حلّ النظام $(1, -2)$.

أنصحق من فهمي:



1 $y = -4 - x$
 $y = 2x + 14$

2 $y = -x + 5$
 $y = x - 3$

إنّ التمثيل البياني لنظام معادلات خطيّة مكوّن من معادلتين يكون إمّا مستقيمتين متقاطعتين وهذا يعني وجود حلّ واحد فقط للنظام هو نقطة التقاطع، أو مستقيمتين متوازيين ممّا يعني أنّه لا يوجد حلّ للنظام، أو المستقيمتان متطابقتان وهذا يعني وجود عدديّ لانهايتيّ من الحلول.

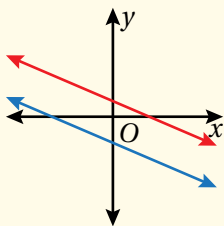
الحلول الممكنة لنظام المعادلات الخطيّة

مفهوم أساسي



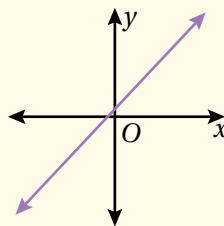
يمكن أن يكون لنظام المعادلات الخطيّة المكوّن من معادلتين خطيّتين حلّ واحد فقط، أو عدديّ لانهايتيّ من الحلول، أو أنّه لا يوجد له حلّ.

لا يوجد حلّ



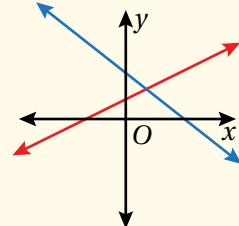
مستقيمتان متوازيان

عدديّ لانهايتيّ من الحلول



المستقيمتان متطابقتان

حلّ واحد

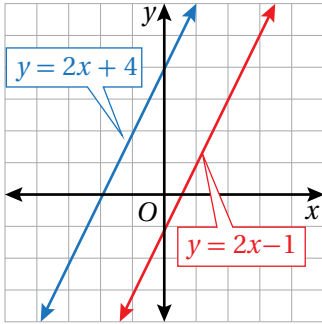


مستقيمتان متقاطعتان

أحلّ كلا من أنظمة المعادلات الآتية بيانياً:

1 $y = 2x + 4$

$y = 2x - 1$



الخطوة 1 أمثل المعادلتين في المستوى الإحداثي نفسه.

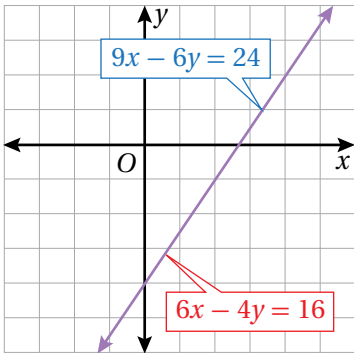
الخطوة 2 أحدد نقطة تقاطع المستقيمين.

ألاحظ من التمثيل البياني أن المستقيمين متوازيان، وهذا يعني أنه لا توجد نقطة مشتركة بين المعادلتين.

إذن، لا يوجد حل لهذا النظام.

2 $9x - 6y = 24$

$6x - 4y = 16$



الخطوة 1 أمثل المعادلتين في المستوى الإحداثي نفسه.

ألاحظ أن المعادلتين على الصورة القياسية للمعادلة الخطية، ولتمثيلهما بيانياً يمكنني أولاً كتابتهما على صورة الميل والمقطع، أو اختيار قيمتين لـ x ، ثم تعويضهما في المعادلة لأجد قيم y المقابلة لهما.

الخطوة 2 أحدد نقطة تقاطع المستقيمين.

ألاحظ أن كلا المعادلتين لهما التمثيل البياني نفسه، وأن أي زوج مرتب يحقق المعادلة الأولى سيحقق بالضرورة المعادلة الثانية.

إذن، يوجد للنظام عدد لا نهائي من الحلول.

أنت تعلم

إذا كان للمعادلتين في نظام المعادلات الخطية الميل نفسه والمقطع y نفسه، فإن للنظام عدداً لا نهائياً من الحلول، أما إذا كان للنظام الميل نفسه والمقطع y مختلف فلا يوجد حل للنظام.

أتحقق من فهمي:



3 $y = 2x + 1$

$y = 2x - 5$

4 $-2x + y = 3$

$-4x + 2y = 6$

يُمكنُ نمذجةُ مواقفَ حياتيةٍ عديدةٍ باستعمالِ نظامِ معادلاتٍ خطيةٍ مكوّنٍ مِنْ معادلتينِ خطيتين، وحلّه بيانيًا.

مثال 4: من الحياة



منطاد: منطادان ارتفاع أحدهما 4 m عن سطح الأرض، ويزداد ارتفاعه بمعدل ثابت مقداره 5 m لكل دقيقة، والمنطاد الآخر ارتفاعه 10 m عن سطح الأرض، ويزداد ارتفاعه بمعدل ثابت مقداره 3 m لكل دقيقة. بعد كم دقيقة يصبح للمنطادين الارتفاع نفسه؟

بالكلمات ارتفاع المنطاد يساوي معدل ارتفاعه مضروباً بعدد الدقائق مضافاً إليه ارتفاعه الأصلي.

بالكلمات

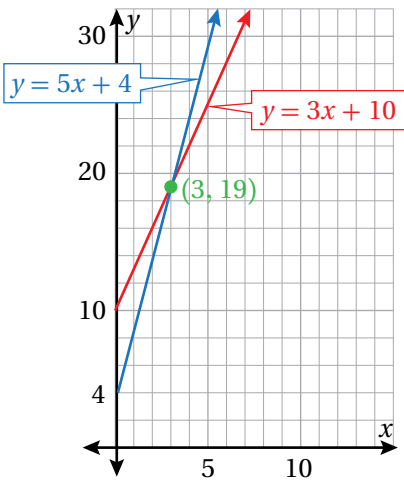
ليكن x عدد الدقائق، و y ارتفاع المنطاد.

المتغير

معادلة ارتفاع المنطاد الأول: $y = 5x + 4$

المعادلات

معادلة ارتفاع المنطاد الثاني: $y = 3x + 10$



لإيجاد متى يصبح للمنطادين الارتفاع نفسه، أمثل المعادلتين $y = 5x + 4$ و $y = 3x + 10$ بيانيًا، لأجد نقطة تقاطع المستقيمين وهي (3, 19).

أتحقق من صحة الحل:

أتحقق من أن الزوج المرتب (3, 19) يمثل حلاً لكلا المعادلتين:

المعادلة 2

$$y = 3x + 10$$

$$19 \stackrel{?}{=} 3(3) + 10$$

$$19 = 19 \quad \checkmark$$

المعادلة 1

$$y = 5x + 4$$

$$19 \stackrel{?}{=} 5(3) + 4$$

$$19 = 19 \quad \checkmark$$

إذن، يصبح للمنطادين الارتفاع نفسه بعد 3 دقائق، ويكون ارتفاعهما عن سطح الأرض 19 m

الوحدة 6

أتحقق من فهمي:



لعبة إلكترونية: تريد الأختان هدى وندى شراء لعبة إلكترونية، وتوفران من مصروفيهما من أجل ذلك. إذا كان مع هدى JD 14 وتوفّر أسبوعياً JD 3، ومع ندى JD 6 وتوفّر أسبوعياً JD 5 فبعد كم أسبوع يكون مع الأختين المبلغ نفسه؟

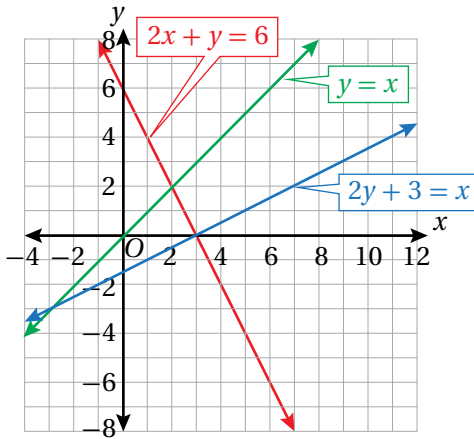
أتحرب وأحل المسائل



أحدّما إذا كان الزوج المرتب يمثل حلاً لنظام المعادلات الخطية المعطى في كلٍّ مما يأتي:

1 $(2, -2); 3x + y = 4$
 $x - 3y = 8$

2 $(-1, 3); y = -7x - 4$
 $y = 8x + 5$



أستعمل التمثيل البياني المجاور لأجد حل كل نظام معادلات مما يأتي:

3 $y = x$
 $2x + y = 6$

4 $2y + 3 = x$
 $2x + y = 6$

5 $2y + 3 = x$
 $y = x$

أحلّ كلّاً من أنظمة المعادلات الآتية بيانياً:

6 $y = 4x + 2$
 $y = -2x - 4$

7 $y = x - 6$
 $y = x + 2$

8 $y = -3$
 $y = x - 3$

9 $x + y = 4$
 $3x + 3y = 12$

10 $2x + 3y = 12$
 $2x - y = 4$

11 $y = 6x + 3$
 $y = 2x + 3$

12 $8x - 4y = 16$
 $-5x - 5y = 5$

13 $4x - 6y = 12$
 $-2x + 3y = -6$

14 $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y = \frac{1}{4}$
 $\frac{2}{3}x + \frac{1}{6}y = \frac{1}{2}$

إرشاد

يسهل التخلص من الكسور حل أنظمة المعادلات، ويتم ذلك بضرب معاملات الحدود في كل معادلة بالمضاعف المشترك الأصغر لمقامات الكسور.

معلومة

ازدادت أعداد مستخدمي المواقع التعليمية على الإنترنت في أثناء جائحة كورونا.



15

أعمار: يقلُّ عُمرُ نوالَ عن عُمرِ والدتيها بمقدار 26 عامًا، ومجموعُ عُمرَيهما 50 عامًا. أكتبُ نظامًا من معادلتين خطيتين يُمثلُ عُمرَ نوالَ وعُمرَ أمِّها، ثمَّ أجدُ عُمرَ كلِّ منهما.

مواقع إنترنت: موقعان تعليميان على شبكة الإنترنت، سجَّلَ الأولُ مليونَ زيارةٍ عامَ 2020م، وفي كلِّ عامٍ لاحقٍ ازدادَ عددُ زيارتهِ بمعدَّلٍ ثابتٍ مقداره نصفُ مليونِ زيارةٍ. وسجَّلَ الموقعُ الثاني عشرةَ ملايينَ زيارةٍ عامَ 2020م، ولكنَّ هذا العددَ تناقصَ في كلِّ عامٍ لاحقٍ بمعدَّلٍ ثابتٍ يُساوي مليونَ زيارةٍ.

16

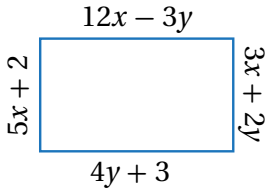
أكتبُ نظامًا من معادلتين خطيتين يُمثلُ أعدادَ زياراتِ الموقعين.

17

في أيِّ عامٍ سيصبحُ عددُ زياراتِ كلِّ مِنَ الموقعين متساويًا؟

18

هندسة: أجدُ قيمتي x و y للمستطيل المجاور.



19

أعودُ إلى فقرة (أستكشف) بدايةَ الدرس، وأحلُّ المسألة.

مهارات التفكير العليا

20

تبرير: هل يمكنُ أن يكونَ لنظامٍ معادلاتٍ خطيةٍ مكونٍ من معادلتين خطيتين حلًّا مختلفان؟ أبرِّرُ إجابتي.

21

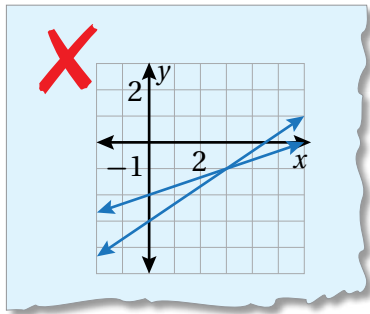
أكتشفُ الخطأ: يبيِّنُ الشكلُ المجاورُ أنَّ حلَّ

نظامِ المعادلاتِ الآتي هو النقطة $(3, -1)$:

$$x - 3y = 6$$

$$2x - 3y = 3$$

أكتشفُ الخطأ في الحلِّ، وأصحِّحُه.



22

مسألة مفتوحة: أكتبُ نظامَ معادلاتٍ خطيةٍ مكونًا من معادلتين خطيتين ليسَ لهُ حلٌّ، ونظامًا آخرَ لهُ عددٌ لانهائيٌّ مِنَ الحلولِ.

23

أكتبُ: كيفَ أجدُ حلَّ نظامِ معادلاتٍ خطيةٍ مكونٍ من معادلتين خطيتين بيانياً؟

تمثيل نظام من معادلتين خطيتين بيانياً

يُمكنُ استعمالُ برمجية جيوجيبرا لحلّ نظام معادلات خطيّة مكوّن من معادلتين خطيّتين بمتغيّرين بيانياً في المستوى الإحداثيّ.

نشاط

أحلّ نظام المعادلات الآتي بيانياً باستعمال برمجية جيوجيبرا.

$$4x + 3y = 18$$

$$2x - 3y = 0$$

الخطوة 1 أدخل في شريط الإدخال المعادلة الأولى: $4x + 3y = 18$ ، ثمّ أضغط .

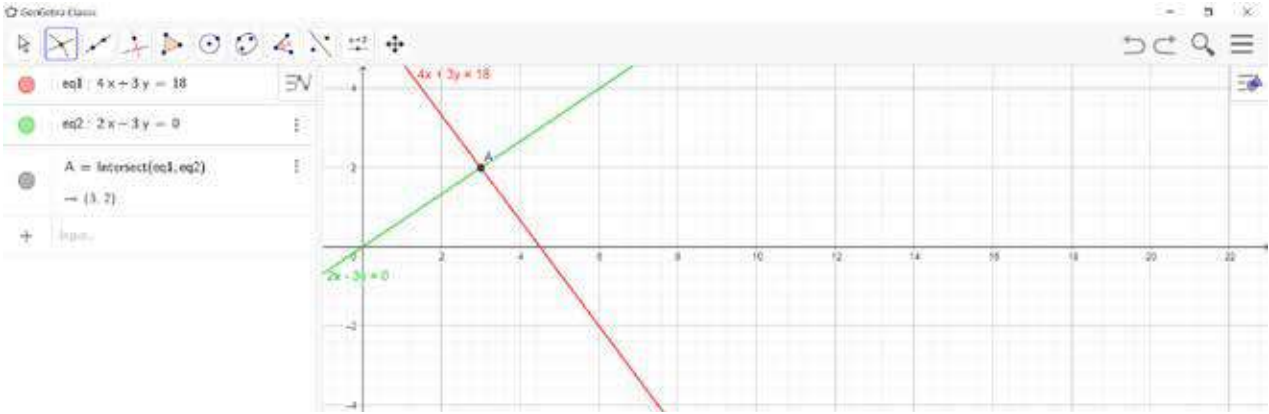
الخطوة 2 أدخل في شريط الإدخال المعادلة الثانية: $2x - 3y = 0$ ، ثمّ أضغط .

الخطوة 3 اختار أيقونة من شريط الأدوات، ثمّ انقر على المستقيمين، وألاحظ ظهور نقطة

تقاطع المستقيمين في المستوى الإحداثيّ، وإحداثيّها في شريط الإدخال

A = Intersect (eq1, eq2)
→ (3, 2)

إذن، حلّ النظام هو (3, 2).



أحلّ كلّ نظام معادلات ممّا يأتي بيانياً باستعمال برمجية جيوجيبرا:

أَتَدَرَّبُ



1 $x + y = 8$
 $x - 2y = 2$

2 $y = 2x - 6$
 $y = 2x + 2$

3 $y = 4x + 2$
 $y = -2x - 5$

4 $2x + 3y = 12$
 $2x - y = 4$

أستكشفُ



قاسْتُ حينئذٍ درجة الحرارة في أحدِ أيامِ الشتاءِ في منتصفِ النهارِ، ثُمَّ قاسْتُها مرّةً ثانيةً في منتصفِ الليلِ، لتجدَ أنَّ مجموعَ درجتَي الحرارة 5°C والفرقَ بينهما 11°C . ما درجة الحرارة في منتصفِ النهارِ؟ وما درجة الحرارة في منتصفِ الليلِ؟



فكرة الدرس

أحلُّ نظامَ معادلاتٍ خطيّةٍ مكوّنًا من معادلتين بالتعويض.

المصطلحات

التعويض.

تعلّمتُ في الدرسِ السابقِ حلَّ نظامٍ مكوّنٍ من معادلتين خطيتين بيانيًا، وسأتعلّمُ في هذا الدرسِ طريقةً أخرى لحلّ نظامِ المعادلاتِ تُستعملُ فيها الخصائصُ الجبريةُ وتسمّى طريقةَ **التعويض** (substitution).

حلّ نظامِ معادلاتٍ خطيّةٍ بالتعويض

مفهومٌ أساسيٌّ

الخطوة 1 إذا لزم الأمرُ، أحلُّ إحدى المعادلتين على الأقلّ بالنسبة لأحد المتغيّرين.

الخطوة 2 أعوّض المقدار الناتج من **الخطوة 1** في المعادلة الثانية، ثُمَّ أحلّها.

الخطوة 3 أعوّض القيمة الناتجة من **الخطوة 2** في أيٍّ من المعادلتين، ثُمَّ أحلُّ المعادلة الناتجة لأجدَ قيمةَ المتغيّر الثاني، ثُمَّ أكتبُ الحلَّ في صورة زوج مرتّب.

مثال 1

أستعملُ التعويضَ لحلّ نظامِ المعادلاتِ الآتي:

$$y = 2x + 3$$

$$3x + 4y = 1$$

الخطوة 1 بما أنَّ المعادلة الأولى مكتوبةً بالنسبة إلى y ؛ إذن أنتقل مباشرةً إلى الخطوة الثانية.

الوحدة 6

الخطوة 2 أعوّض $(2x + 3)$ بدلاً من y في المعادلة الثانية.

$$\begin{aligned}
 3x + 4y &= 1 && \text{المعادلة الثانية} \\
 3x + 4(2x + 3) &= 1 && \text{أعوّض عن } y \text{ بـ } (2x + 3) \\
 3x + 8x + 12 &= 1 && \text{خاصية التوزيع} \\
 11x + 12 &= 1 && \text{أجمع الحدود المشابهة} \\
 11x + 12 - 12 &= 1 - 12 && \text{أطرح 12 من طرفي المعادلة} \\
 \frac{11x}{11} &= \frac{-11}{11} && \text{أقسم طرفي المعادلة على 11} \\
 x &= -1 && \text{أبسط}
 \end{aligned}$$

الخطوة 3 أعوّض -1 بدلاً من x في أيٍّ من المعادلتين لإيجاد قيمة y .

$$\begin{aligned}
 y &= 2x + 3 && \text{المعادلة الأولى} \\
 &= 2(-1) + 3 && \text{أعوّض عن } x \text{ بـ } -1 \\
 &= 1 && \text{أبسط}
 \end{aligned}$$

إذن، حل النظام هو $(-1, 1)$.

التحقق: أتتحقق من صحة الحل بتعويض الزوج المرتب في كلٍّ من معادلتَي النظام.

أتحقق من فهمي:

أحلُّ كلاً من أنظمة المعادلات الآتية مستعملاً التعويض:

1 $y = 17 - 4x$
 $2x + y = 9$

2 $y - 5x = 1$
 $x = y + 3$

لاحظتُ في المثال السابق أن إحدى المعادلتين كانت مكتوبةً بالنسبة إلى أحد المتغيرات، أما إذا لم يكن الأمر كذلك، فأحلُّ إحدى المعادلتين أولاً بالنسبة إلى أحد المتغيرين، ثمَّ أحلُّ النظام بالتعويض.

مثال 2

أستعمل التعويض لحلّ نظام المعادلات الآتي:

$$3x + y = 5$$

$$5x - 2y = 12$$

الخطوة 1 أحلّ المعادلة الأولى بالنسبة للمتغير y ؛ لأنّ معاملهُ 1

$$3x + y = 5$$

$$3x - 3x + y = 5 - 3x$$

$$y = 5 - 3x$$

المعادلة الأولى

أطرح $3x$ من طرفي المعادلة

أبسطُ

الخطوة 2 أعوّض $(5 - 3x)$ بدلاً من y في المعادلة الثانية.

$$5x - 2y = 12$$

$$5x - 2(5 - 3x) = 12$$

$$5x - 10 + 6x = 12$$

$$11x - 10 = 12$$

$$11x - 10 + 10 = 12 + 10$$

$$\frac{11x}{11} = \frac{22}{11}$$

$$x = 2$$

المعادلة الثانية

أعوّض عن y بـ $(5 - 3x)$

خاصية التوزيع

أجمع الحدود المتشابهة

أجمع 10 إلى طرفي المعادلة

أقسم طرفي المعادلة على 11

أبسطُ

الخطوة 3 أعوّض 2 بدلاً من x في أيّ من المعادلتين لإيجاد قيمة y .

$$3x + y = 5$$

$$3(2) + y = 5$$

$$6 + y = 5$$

$$y = -1$$

المعادلة الأولى

أعوّض عن x بـ 2

أبسطُ

أطرح 6 من طرفي المعادلة

إذن، حلّ النظام هو $(2, -1)$.

التحقّق: أتحقّق من صحّة الحلّ بتعويض الزوج المرتب في كلّ من معادلتَي النظام.

أتحقق من فهمي:



أحلُّ كلاً من أنظمة المعادلات الآتية مستعملًا التعويض:

1 $4x + 3y = 37$
 $2x + y = 17$

2 $x + 3y = 7$
 $2x - y = 7$

بشكل عام، إذا كان ناتج حل نظام معادلات خطية مكون من معادلتين خطيتين جملةً صحيحةً مثل $(-2 = -2)$ ، فإن النظام عددًا لانهائيًا من الحلول، أما إذا كان الناتج جملةً خطأً مثل $(-2 = 5)$ ، فلا يوجد حل للنظام.

مثال 3

أحلُّ كلاً من أنظمة المعادلات الآتية مستعملًا التعويض:

1 $x - 4y = 12$
 $8y - 2x = 20$

الخطوة 1 أحلُّ المعادلة الأولى بالنسبة للمتغير x ؛ لأن معامل x 1

المعادلة الأولى $x - 4y = 12$

أجمع $4y$ إلى طرفي المعادلة $x - 4y + 4y = 12 + 4y$

أبسط $x = 12 + 4y$

الخطوة 2 أعوض $(12 + 4y)$ بدلاً من x في المعادلة الثانية.

المعادلة الثانية $8y - 2x = 20$

أعوض عن x بـ $(12 + 4y)$ $8y - 2(12 + 4y) = 20$

خاصية التوزيع $8y - 24 - 8y = 20$

أجمع الحدود المشابهة $-24 = 20$

بما أن الجملة الناتجة خطأً، إذن، لا يوجد حل للنظام.

2 $x - y = 5$
 $2x = 2y + 10$

الخطوة 1 أحل المعادلة الأولى بالنسبة للمتغير x ؛ لأن معامل x 1

المعادلة الأولى $x - y = 5$

أجمع y إلى طرفي المعادلة $x - y + y = 5 + y$

أبسط $x = 5 + y$

الخطوة 2 أعوض $(5 + y)$ بدلاً من x في المعادلة الثانية.

المعادلة الثانية $2x = 2y + 10$

أعوض عن x بـ $(5 + y)$ $2(5 + y) = 2y + 10$

خاصية التوزيع $10 + 2y = 2y + 10$

أطرح $2y$ من طرفي المعادلة $10 + 2y - 2y = 2y - 2y + 10$

أبسط $10 = 10$

بما أن الجملة الناتجة صحيحة، إذن، يوجد عددٌ لانهائي من الحلول.

تحقق من فهمي: ✓

3 $x - 2y = 4$
 $8y - 4x = 8$

4 $x - 5y = 15$
 $10y - 2x = -30$

يمكن استعمال التعويض لحل مسائل من واقع الحياة تتضمن نظاماً من معادلتين خطيتين بمتغيرين.

مثال 4: من الحياة



اختبارات: تقدّمت أمانى لاختبار مكون من 50 سؤالاً تحصل فيه على علامتين عن كل سؤال إجابته صحيحة، وتخسر علامة عن كل سؤال إجابته خطأ. فإذا أجابت أمانى عن أسئلة الاختبار جميعها وحصلت على 67 علامة، فكم سؤالاً أجابت عنه إجابة صحيحة؟



الوحدة 6

لِتَكُنْ x عددَ الأسئلة التي إجابتهُ صحيحةً، و y عددَ الأسئلة التي إجابتهُ خطأً.
إذن، نظامُ المعادلات الذي يعبرُ عن المسألة هو:

$$x + y = 50$$

$$2x - y = 67$$

الخطوة 1 أحلَّ المعادلة الأولى بالنسبة للمتغير y ؛ لأنَّ معاملَهُ 1

$$x + y = 50$$

المعادلة الأولى

$$x - x + y = 50 - x$$

أطرح x من طرفي المعادلة

$$y = 50 - x$$

أبسطُ

الخطوة 2 أعوِّض $(50 - x)$ بدلاً من y في المعادلة الثانية.

$$2x - y = 67$$

المعادلة الثانية

$$2x - (50 - x) = 67$$

أعوِّض عن y بـ $(50 - x)$

$$2x - 50 + x = 67$$

خاصية التوزيع

$$3x - 50 = 67$$

أجمع الحدود المتشابهة

$$3x - 50 + 50 = 67 + 50$$

أجمع 50 إلى طرفي المعادلة

$$3x = 117$$

أقسم طرفي المعادلة على 3

$$x = 39$$

أبسطُ

إذن، أجابت أمانى في الاختبار عن 39 سؤالاً إجابةً صحيحةً.

أتتحقق من فهمي:



تسوق: اشترى خالد كتاباً وناقلةً بياناتٍ بـ JD 14، إذا كان مثلاً ثمن الكتاب يزيد عن ثمن ناقلة البيانات بمقدار JD 10، فما سعر كلٍّ من ناقلة البيانات والكتاب؟

أحلّ كلّاً مِنْ أَنْظِمَةِ المعادلاتِ الآتيةِ مستعملًا التعويضَ:

1 $y = 4x + 2$
 $2x + y = 8$

2 $y = x + 5$
 $y = -2x - 4$

3 $x = 3 - \frac{1}{2}y$
 $5x - y = 1$

4 $\frac{1}{2}x - y = 2$
 $y = 9 - 5x$

5 $x - 4y = 20$
 $y - 3x = 6$

6 $y - 6x = 3$
 $y - 2x = 3$

7 $8x - y = 16$
 $\frac{1}{4}y - 2x = 3$

8 $6x - 9y = 18$
 $-2x + 3y = -6$

9 $y + 3x + 6 = 0$
 $y + 6x + 24 = 0$

أتذكر

يمكنني أيضًا استعمالُ
استراتيجية التخمينِ
والتحققِ لإيجادِ عددِ
الدجاجِ والأرانبِ.

10 **مزرعة:** مزرعة حيواناتٍ فيها دجاجٌ وأرانبٌ، إذا عددتُ رؤوسَها سأجدُها 18 رأسًا، وإذا عددتُ أرجلَها سأجدُها 50 رجلًا. كم دجاجةً وكم أرنبًا في هذه المزرعة؟



فاكهة: اشترى مُرادٌ وفؤادٌ برتقالًا وتفاحًا
مِنَ النوعِ نفسه، فدفعَ مرادٌ JD 3.25 عندَ
شرائهِ 5 kg برتقالًا و 1 kg تفاحًا، ودفعَ
فؤادٌ JD 3.75 عندَ شرائهِ 3 kg تفاحًا
و 3 kg برتقالًا:

11 أكتبُ نظامًا مِنْ معادلتينِ خطيتينِ يُمثِّلُ المسألةَ، ثُمَّ أحلُّهُ لأجدَ سعرَ الكيلوغرامِ
الواحدِ مِنْ كُلِّ مِنَ التفاحِ والبرتقالِ.

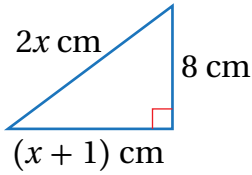
12 إذا اشترتُ منالٌ 2 kg مِنْ نوعِ التفاحِ نفسه و 2 kg مِنْ نوعِ البرتقالِ نفسه، فما المبلغُ
الذي دفعتهُ؟

الوحدة 6

سياحة: يُبين الجدول الآتي أعداد السياح في موقعين أثريين في أحد الأعوام، ومعدل الزيادة السنوية في أعداد السياح (بالآلاف) بعد ذلك العام:

	معدل الزيادة في أعداد السياح (بالآلاف لكل عام)	أعداد السياح (بالآلاف)
الموقع (أ)	1.1	57
الموقع (ب)	0.7	61

إذا استمرت الزيادة في أعداد السياح وفق هذه المعدلات، فبعد كم عام يمكن أن تتساوى أعداد السياح في الموقعين؟ وكم يبلغ عددهم حينئذ؟



هندسة: إذا كانت القيمة العددية لمحيط المثلث المجاور تساوي القيمة العددية لمساحته، فما قيمة x ؟

تبرير: أجد قيمتي الثابتين a و b في نظام المعادلات الخطية الآتي، حيث الزوج المرتب $(-9, 1)$ هو حل النظام، مبرراً إجابتي:

$$ax + by = -31$$

$$ax - by = -41$$

مسألة مفتوحة: أكتب نظام معادلات خطية مكوناً من معادلتين خطيتين حيث يمثل الزوج المرتب $(-5, 3)$ حلاً لإحدى المعادلتين فقط، ويمثل الزوج المرتب $(-1, 7)$ حلاً للنظام.



تحذ: تتألف دفعة من خريجي دورة للدفاع المدني من 240 شخصاً، نسبة الذكور فيها إلى الإناث 5 : 7، أكتب نظاماً من معادلتين خطيتين يمثل المسألة، ثم أحله لأجد عدد الذكور وعدد الإناث في هذه الدفعة من الخريجين.

أكتب: كيف أحل نظام معادلات خطية مكوناً من معادلتين بالتعويض؟

معلومة

توجد في الأردن مواقع أثرية عدة تعود لحضارات وحقب تاريخية مختلفة.



مهارات التفكير العليا

معلومة

تسعى مديرية الدفاع المدني إلى تعميق مفهوم الوعي الوقائي، ونشره في المجتمع، عن طريق برامج تدريبية تنمي مهارات إطفاء الحرائق والإنقاذ والإسعاف.

أستكشف



تمارسُ سميرةُ الرياضةَ كلَّ صباحٍ لمدة 40 دقيقةً، بحيثُ تلعبُ أولاً تمارينَ الإطالة التي تحرقُ بها 4 سعراتٍ حرارية في الدقيقة، ثم تلعبُ مجموعةً من التمارين الهوائية؛ لتساعدَها على حرق 11 سعرةً حرارية في الدقيقة. كم دقيقةً على سميرة أن تلعبَ من كلِّ نشاطٍ لتحرقَ 335 سعرةً حرارية؟



فكرة الدرس

أحلُّ نظامَ معادلاتٍ خطيّةٍ مكوّنًا من معادلتين بالحذف.

المصطلحات

الحذف.

في بعض الأحيان يؤدي جمعُ معادلتين أو طرحُهما إلى حذفِ أحد المتغيّرات، وتسمّى هذه الطريقة الجبرية في حلِّ نظام المعادلات الخطيّة طريقة الحذف (elimination).

حلُّ نظام معادلاتٍ خطيّةٍ بالحذف

مفهوم أساسي

1 **الخطوة** أضرب - إن لزم الأمر - إحدى المعادلتين أو كليهما في عدد ثابت بحيث يكون هناك على الأقل حدان متشابهان معاملاهما متساويان أو معامِل أحدهما معكوس للآخر.

2 **الخطوة** أكتب النظام بحيث تكون الحدود المتشابهة فوق بعضها بعضًا.

3 **الخطوة** أجمع المعادلتين أو اطرحهما للتخلص من أحد المتغيّرات، ثمّ أ حلّ المعادلة الناتجة.

4 **الخطوة** أعوّض القيمة الناتجة في الخطوة 3 في إحدى المعادلتين، ثمّ أ حلّها لإيجاد قيمة المتغيّر الثاني، ثمّ أكتب الحلّ كزوج مرتّب.

مثال 1

أستعمل الحذف لحلِّ نظام المعادلات الآتي:

$$5x + y = 22$$

$$2x - y = 6$$

1 **الخطوة** بما أن معاملي y في المعادلتين كلٌّ منهما معكوس للآخر، فهذا يعني أنني لست بحاجة إلى ضرب أيٍّ من المعادلتين بثابت؛ إذن أنتقل مباشرةً إلى الخطوة الثانية.

الخطوة 2 أجمع المعادلتين.

$$\begin{array}{rcl} 5x + y & = & 22 \\ (+) \quad 2x - y & = & 6 \\ \hline 7x & = & 28 \\ \frac{7x}{7} = \frac{28}{7} & & \\ x & = & 4 \end{array}$$

أحذف المتغير y

أقسم طرفي المعادلة على 7

أبسط

الخطوة 3 أعوض 4 بدلاً من x في إحدى المعادلتين؛ لإيجاد قيمة y .

$$\begin{array}{rcl} 5x + y & = & 22 \\ 5(4) + y & = & 22 \\ 20 + y & = & 22 \\ 20 - 20 + y & = & 22 - 20 \\ y & = & 2 \end{array}$$

المعادلة الأولى

أعوض عن x بـ 4

أبسط

أطرح 20 من كلا الطرفين

أبسط

إذن، حل النظام هو $(4, 2)$.

التحقق: أتأكد من صحة الحل بتعويض الزوج المرتب في كل من معادلي النظام.

أتحقق من فهمي: 

أحل كلاً من أنظمة المعادلات الآتية مستعملاً الحذف:

1 $\begin{array}{rcl} 2x + y & = & 7 \\ 5x - y & = & 14 \end{array}$

2 $\begin{array}{rcl} 3x + 2y & = & 16 \\ 6y - 3x & = & -12 \end{array}$

يمكنني استعمال الطرح لحل نظام معادلات خطية مكون من معادلتين خطيتين، وذلك عندما يكون في المعادلتين حدان متشابهان معاملهما متساويان.

مثال 2

أستعملُ الحذفَ لحلِّ نظامِ المعادلاتِ الآتي:

$$12x + 2y = 30$$

$$8x + 2y = 22$$

الخطوة 1 ألاحظُ أنَّ كلا المعادلتينِ تحويانِ $2y$ ، وهذا يعني أنني لستُ بحاجةٍ إلى ضربِ أيٍّ من المعادلتينِ بثابتٍ، وأنَّه يمكنُ حلَّ النظامِ بطرحِ إحدى المعادلتينِ مِنَ الأُخرى.

الخطوة 2 أطرحُ معادلةً مِنَ الأُخرى.

$$\begin{array}{r} 12x + 2y = 30 \\ (-) \quad 8x + 2y = 22 \\ \hline 4x \quad \quad = 8 \\ \frac{4x}{4} = \frac{8}{4} \\ x = 2 \end{array}$$

أحذفُ المتغيِّرَ y

أقسمُ طرفيَّ المعادلةِ على 4

أبسطُ

الخطوة 3 أعوِّضُ 2 بدلاً مِنْ x في إحدى المعادلتينِ؛ لإيجادِ قيمةِ y .

$$\begin{array}{r} 12x + 2y = 30 \\ 12(2) + 2y = 30 \\ 24 + 2y = 30 \\ 24 - 24 + 2y = 30 - 24 \\ 2y = 6 \\ \frac{2y}{2} = \frac{6}{2} \\ y = 3 \end{array}$$

المعادلة الأولى

أعوِّضُ عَنْ x بِـ 2

أبسطُ

أطرحُ 24 مِنْ كِلَا الطرفينِ

أبسطُ

أقسمُ طرفيَّ المعادلةِ على 2

أبسطُ

إذن، حلُّ النظامِ هُوَ $(2, 3)$.

التحقُّقُ: أتحقِّقُ مِنْ صحَّةِ الحلِّ بتعويضِ الزوجِ المرتَّبِ في كُلِّ مِنْ معادلتَي النظامِ.

أتحقق من فهمي:



أحلُّ كلاً من أنظمة المعادلات الآتية مستعملاً الحذف:

1 $2x + 5y = 16$
 $2x + 3y = 18$

2 $3x - 4y = 17$
 $x - 4y = 3$

أحتاج في بعض حالات حل أنظمة المعادلات الخطية إلى ضرب إحدى المعادلتين في عدد ثابت؛ للحصول على معادلتين فيهما حدان متشابهان معامل أحدهما معكوس للآخر.

مثال 3

أستعمل الحذف لحل نظام المعادلات الآتي:

$$3x + 2y = 18$$

$$2x - y = 5$$

الخطوة 1 أضرب المعادلة الثانية في 2

$$3x + 2y = 18$$

$$2x - y = 5$$

أضرب كل حد في 2

$$3x + 2y = 18$$

$$4x - 2y = 10$$

الخطوة 2 أجمع المعادلتين.

$$\begin{array}{r} 3x + 2y = 18 \\ (+) \quad 4x - 2y = 10 \\ \hline 7x \quad = 28 \\ \frac{7x}{7} = \frac{28}{7} \\ x = 4 \end{array}$$

أحذف المتغير y

أقسم طرفي المعادلة على 7

أبسط

الخطوة 3 أعوض 4 بدلاً من x في إحدى المعادلتين؛ لإيجاد قيمة y .

$$2x - y = 5$$

المعادلة الثانية

$$2(4) - y = 5$$

أعوض عن x بـ 4

$$8 - y = 5$$

أبسط

$$8 - 8 - y = 5 - 8$$

أطرح 8 من كلا الطرفين

$$-y = -3$$

أبسط

$$\frac{-y}{-1} = \frac{-3}{-1}$$

أقسم طرفي المعادلة على -1

$$y = 3$$

أبسط

إذن، حل النظام هو $(4, 3)$.

التحقق: أتأكد من صحة الحل بتعويض الزوج المرتب في كل من معادلي النظام.

أتأكد من فهمي:

أحل كلاً من أنظمة المعادلات الآتية مستعملاً الحذف:

1 $5x + 2y = 4$
 $4x - y = 11$

2 $3x + 5y = 15$
 $x + 3y = 7$

أحتاج في بعض حالات حل أنظمة المعادلات الخطية إلى ضرب كل معادلة في عدد ثابت مختلف للحصول على معادلتين فيهما حدان متشابهان معامل أحدهما معكوس للآخر.

مثال 4

أستعمل الحذف لحل نظام المعادلات الآتي:

$$4x + 3y = 27$$

$$5x - 2y = 5$$

الوحدة 6

الخطوة 1 أضرب المعادلة الأولى في 2 والمعادلة الثانية في 3؛ لأحذف المتغير y

$$4x + 3y = 27$$

أضرب كل حد في 2

$$8x + 6y = 54$$

$$5x - 2y = 5$$

أضرب كل حد في 3

$$15x - 6y = 15$$

الخطوة 2 أجمع المعادلتين.

أنت تعلم

يمكن أيضًا حل النظام بحذف المتغير x ، فمثلاً: يمكنني ضرب المعادلة الأولى في 5 وضرب المعادلة الثانية في -4

$$8x + 6y = 54$$

$$(+)\quad 15x - 6y = 15$$

$$23x = 69$$

$$\frac{23x}{23} = \frac{69}{23}$$

$$x = 3$$

أحذف المتغير y

أقسم طرفي المعادلة على 23 أبسط

الخطوة 3 أعوض 3 بدلاً من x في إحدى المعادلتين؛ لإيجاد قيمة y .

$$5x - 2y = 5$$

$$5(3) - 2y = 5$$

$$15 - 2y = 5$$

$$15 - 15 - 2y = 5 - 15$$

$$-2y = -10$$

$$\frac{-2y}{-2} = \frac{-10}{-2}$$

$$y = 5$$

المعادلة الثانية

أعوض عن x بـ 3

أبسط

أطرح 15 من كلا الطرفين

أبسط

أقسم طرفي المعادلة على -2

أبسط

إذن، حل النظام هو $(3, 5)$.

التحقق: أتتحقق من صحة الحل بتعويض الزوج المرتب في كل من معادلتَي النظام.

أتحقق من فهمي:

أحل كلاً من أنظمة المعادلات الآتية مستعملًا الحذف:

1 $2x + 5y = 15$

$3x - 2y = 13$

2 $5x - 3y = 14$

$4x - 5y = 6$

يمكن استعمال الحذف لحل مسائل حياتية وعلمية تتضمن نظامًا من معادلتين خطيتين بمتغيرين.

مثال 5: من الحياة



وظيفة: يعمل ماجد وحازم أثناء عطلة الجامعة في محطتين مختلفتين لوقود السيارات، ويتقاضى كلُّ منهما أجرته على عدد ساعات العمل. في أحد الأيام عمل ماجد 6 ساعات وعمل حازم 7 ساعات، فكان مجموع ما تقاضياه معًا JD 36، وفي اليوم التالي عمل ماجد 8 ساعات وعمل حازم 6 ساعات، فكان مجموع ما تقاضياه معًا JD 38. كم يتقاضى كلُّ منهما عن كل ساعة عمل؟

لتكن x الأجرة التي يتقاضاها ماجد عن كل ساعة عمل، و y الأجرة التي يتقاضاها حازم عن كل ساعة عمل. إذن، نظام المعادلات الذي يعبر عن المسألة هو:

$$6x + 7y = 36$$

$$8x + 6y = 38$$

الخطوة 1 أضرب المعادلة الأولى في 4 والمعادلة الثانية في -3؛ لأحذف المتغير x .

$$6x + 7y = 36$$

أضرب كل حد في 4

$$24x + 28y = 144$$

$$8x + 6y = 38$$

أضرب كل حد في -3

$$-24x - 18y = -114$$

الخطوة 2 أجمع المعادلتين.

أُتَعَلَّمُ

يمكن أيضًا حل النظام بحذف المتغير y ، فمثلاً: يمكنني ضرب المعادلة الأولى في 6 وضرب المعادلة الثانية في -7

$$24x + 28y = 144$$

$$(+)$$

$$-24x - 18y = -114$$

$$10y = 30$$

$$\frac{10y}{10} = \frac{30}{10}$$

$$y = 3$$

أحذف المتغير x

أقسم طرفي المعادلة على 10

أبسط

الوحدة 6

الخطوة 3 أعوض 3 بدلاً من y في إحدى المعادلتين؛ لإيجاد قيمة x .

$$6x + 7y = 36$$

المعادلة الأولى

$$6x + 7(3) = 36$$

أعوض عن y بـ 3

$$6x + 21 = 36$$

أبسط

$$6x + 21 - 21 = 36 - 21$$

أطرح 21 من كلا الطرفين

$$6x = 15$$

أبسط

$$\frac{6x}{6} = \frac{15}{6}$$

أقسم طرفي المعادلة على 6

$$x = 2.5$$

أبسط

أي إن ماجداً يتقاضى JD 2.5 عن كل ساعة عمل، أما حازم فيتقاضى JD 3 عن كل ساعة عمل.

أتحقق من فهمي:



حافلة فيها ركاب من النساء والأطفال، إذا كان ثلاثة أمثال عدد النساء مضافاً إليه مثلاً عدد الأطفال يساوي 29، وكان مثلاً عدد النساء مضافاً إليه عدد الأطفال يساوي 17، فكَم امرأة وكم طفلاً في الحافلة؟

أحلّ كلاً من أنظمة المعادلات الآتية مستعملاً الحذف:

أدرب وأحل المسائل



1 $4x - y = -2$
 $2x + y = 8$

2 $3x + y = 4$
 $5x + y = 6$

3 $6x + 2y = 14$
 $3x - 5y = 10$

4 $11x - 20y = 28$
 $3x + 4y = 36$

5 $-2x - 5y = 9$
 $3x + 11y = 4$

6 $y + 2x = 4$
 $x - y = 5$

7 $2x + 3y = 30$
 $5x + 7y = 71$

8 $3x - 4y = 4.5$
 $x + y = 5$

9 $0.5x - 9y = 28$
 $30.5x + 7y = 40$

إرشاد

ترتيب الحدود المتشابهة في المعادلتين تحت بعضهما بعضاً يسهل حلّ نظام المعادلات.

10 $8x + y = 1$
 $8x - y = 3$

11 $12x - 7y = -2$
 $8x + 11y = 30$

12 $9x + 2y = 39$
 $6x + 13y = -9$



طقس: لاحظ راصدٌ جويٌّ أنَّ عددَ الأيامِ مِنْ شهرِ كانونِ الأولِ التي تساقطتْ فيها الأمطارُ يزيدُ 7 أيامٍ عَنْ تلكِ التي لَمْ تساقطْ فيها الأمطارُ. اكتبْ نظامًا مِنْ معادلتينِ خطيتينِ يُمثلُ المسألةَ، ثُمَّ أحلَّهُ لأجدَ عددَ الأيامِ التي تساقطتْ فيها الأمطارُ وعددَ الأيامِ التي لَمْ تساقطْ فيها الأمطارُ في هذا الشهرِ.

أفكر

كَمْ يومًا في شهرِ كانونِ الأولِ؟

كانون الثاني	شباط	آذار
نيسان	أيار	حزيران
تموز	أب	أيلول
تشرين الأول	تشرين الثاني	كانون الأول

أربطُ كلَّ زوجٍ مرتَّبٍ مَعَ نظامٍ معادلاتٍ خطيةٍ مكوّنٍ مِنْ معادلتينِ مِنَ المعادلاتِ الأربعِ المُعطاةِ، بحيثُ يكونُ الزوجُ المرتَّبُ حلًّا للمعادلتينِ:

المعادلاتُ	الزوجُ المرتَّبُ
$5x + 2y = 1$	$(1, -2)$
$4x + y = 9$	$(-1, 3)$
$3x - y = 5$	$(2, 1)$
$3x + 2y = 3$	$(3, -3)$

أعداد: ثلاثة أمثالِ عددٍ مطروحًا مِنْهَا عددٌ آخَرُ يُساوي -3 ، إذا كانَ مجموعُ العددينِ يُساوي 11 ، فما العددا؟



موادٌ غذائية: في مخزنٍ أحدِ المطاعمِ مجموعةٌ مِنْ أكياسِ الأرزِّ وأكياسِ السكرِ. كتلةُ 3 أكياسٍ مِنَ السكرِ وَ4 أكياسٍ مِنَ الأرزِّ 12 kg ، وكتلةُ 5 أكياسٍ مِنَ السكرِ وكيسينِ مِنَ الأرزِّ 13 kg . كيفَ يمكنُ مساعدةُ طبّاخِ المطعمِ على إيجادِ كتلةِ كيسينِ مِنَ السكرِ وخمسةِ أكياسٍ مِنَ الأرزِّ؟

معلومة

يفضَّلُ تخزينُ الحبوبِ في مكانٍ جافٍّ بعيدًا عَنْ أشعةِ الشمسِ المباشرةِ؛ حفاظًا عَلَيْهَا مِنَ التَّلَفِ.

الوحدة 6



17 مبنى حكومي: يبلغ ارتفاع مبنى حكومي مع سارية العلم الأردني المثبتة على سطحه 21.6 m، إذا كان ارتفاع المبنى مطروحاً منه ارتفاع سارية العلم يساوي 10.4 m، فما ارتفاع المبنى؟ وكم يبلغ طول سارية العلم؟

18 أعود إلى فقرة (استكشف) بداية الدرس، وأحل المسألة.

مهارات التفكير العليا

19 أكتشف الخطأ: أنظر الحل الآتي واكتشف الخطأ الوارد فيه، وأصححه.

$4x + 3y = 8$		$4x + 3y = 8$
$x - 2y = -13$	أضرب في -4	$-4x + 8y = -52$
		$11y = -44$
		$y = -4$

X

20 مسألة مفتوحة: اقترح قيمة لـ a تجعل لنظام المعادلات الآتي حلاً، مبرراً إجابتي.

$$x + y = 4$$

$$ax + 3y = 4$$

21 تحد: أجد عدداً من منزلتين مجموع رقميه 8، وعند طرح رقم منزلة أحاده من رقم منزلة عشراته يكون الناتج -4

22 أكتب كيف أجد حل نظام معادلات خطية مكون من معادلتين بالحذف؟

اختبار الوحدة

أحلّ كلّاً من أنظمة المعادلات الآتية بيانياً:

5 $y = 2x - 5$

$y = -2x + 7$

7 $x + 2y = 3$

$y = 4x - 3$

9 $y = 0.5x + 10$

$y = 4x - 4$

11 $7x + 2y = 13$

$3y - 2x = -3$

6 $y = x + 4$

$y = 2x + 1$

8 $y = 4 - x$

$y = x - 4$

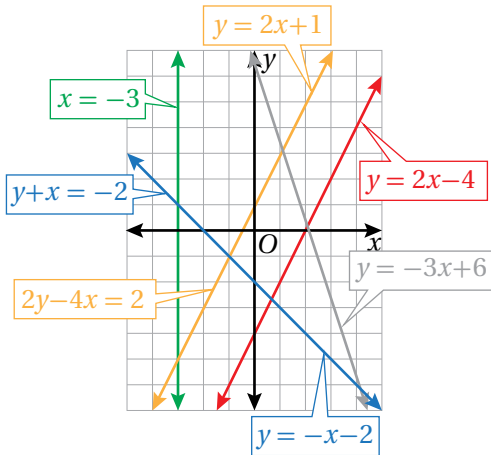
10 $y + x = 0$

$3y + 6x = -9$

12 $y - x = 17$

$y = 4x + 2$

أستعمل التمثيل البياني أدناه، لأحدّد ما إذا كان لكلٍّ من أنظمة المعادلات الآتية حلٌّ واحد، أم لا يوجد له حلٌّ، أم له عددٌ لانهائيٌّ من الحلول:



13 $x = -3$

$y = 2x + 1$

15 $y + x = -2$

$y = -x - 2$

17 $y = -3x + 6$

$y = 2x - 4$

14 $y = 2x + 1$

$y = 2x - 4$

16 $2y - 4x = 2$

$y = 2x - 4$

18 $2y - 4x = 2$

$y = -3x + 6$

أختارُ رمزَ الإجابة الصحيحة لكلِّ ممّا يأتي:

1 حلُّ نظامِ المعادلات الآتي هو:

$x + y = 6$

$x - y = 8$

a) (2, 4)

b) (4, 2)

c) (7, -1)

d) (-1, 7)

2 حلُّ نظامِ المعادلات الآتي هو:

$y = -4x$

$6x - y = 30$

a) (3, 4)

b) (3, -4)

c) (3, 12)

d) (3, -12)

3 أيُّ أنظمة المعادلات الآتية له عددٌ لانهائيٌّ من الحلول؟

a) $x + y = 1$

$x - y = 3$

b) $2y = 4x + 1$

$x - 2y = 7$

c) $2x - y = 6$

$-3y = -6x + 18$

d) $5x = y + 5$

$-x + 3y = 13$

4 أيُّ المعادلات الآتية لها التمثيل البياني نفسه للمعادلة $4x + 8y = 12$ ؟

a) $x + y = 3$

b) $2x + y = 3$

c) $x + 2y = 3$

d) $2x + 3y = 6$

- 29 حديقة مستطيلة الشكل محيطها 68 m وطولها يزيد بمقدار 4 m عن مئلي عرضها. أكتب نظام معادلات خطية مكوناً من معادلتين خطيتين يمثل المسألة، ثم أحله لأجد طول الحديقة وعرضها.

تدريب على الاختبارات الدولية

- 30 أي المعادلات الآتية ينتج عن تمثيلها في المستوى الإحداثي مستقيم مواز للمستقيم $y - 3x = 6$ ؟

- a) $y = -3x + 4$ b) $y = 3x - 2$
c) $y = \frac{1}{3}x + 6$ d) $y = -\frac{1}{3}x + 6$

- 31 كم حلاً لنظام المعادلات الآتي؟

$$4x + y = 7$$

$$3x - y = 0$$

- a) لا يوجد حل b) حل واحد فقط

- c) عدد لا نهائي من الحلول d) حلان

- 32 حل نظام المعادلات الآتي هو:

$$2x - 3y = -9$$

$$-x + 3y = 6$$

- a) (3, 3) b) (3, -1)
c) (-3, 1) d) (1, -3)

أحل كلاً من أنظمة المعادلات الآتية مستعملاً التعويض:

19 $y = x + 3$

$$2x + y = 12$$

21 $x = 2y + 7$

$$3x - 2y = 3$$

20 $x - 2y = 6$

$$2x + y = 2$$

22 $4x - 2y = 14$

$$y = 0.5x - 1$$

أحل كلاً من أنظمة المعادلات الآتية مستعملاً الحذف:

23 $3x + y = 20$

$$2x - y = 5$$

25 $3x - 2y = 4$

$$6x - 2y = -2$$

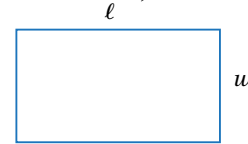
24 $x - 6y = 4$

$$2x + y = -5$$

26 $5y = 15 - 5x$

$$y = -2x + 3$$

- 27 يبين الشكل أدناه مستطيلاً محيطه 40 m، إذا كان طول المستطيل يقل 1 m عن مئلي عرضه، فأكتب نظاماً من معادلتين خطيتين يمثل المسألة، ثم أحله لأجد بعدي المستطيل.



- 28 باع محل كمية من خليط مكسرات اللوز والفسق تبلغ قيمتها JD 27، ويبين الجدول الآتي سعر الأوقية الواحدة من كل نوع في الخليط:



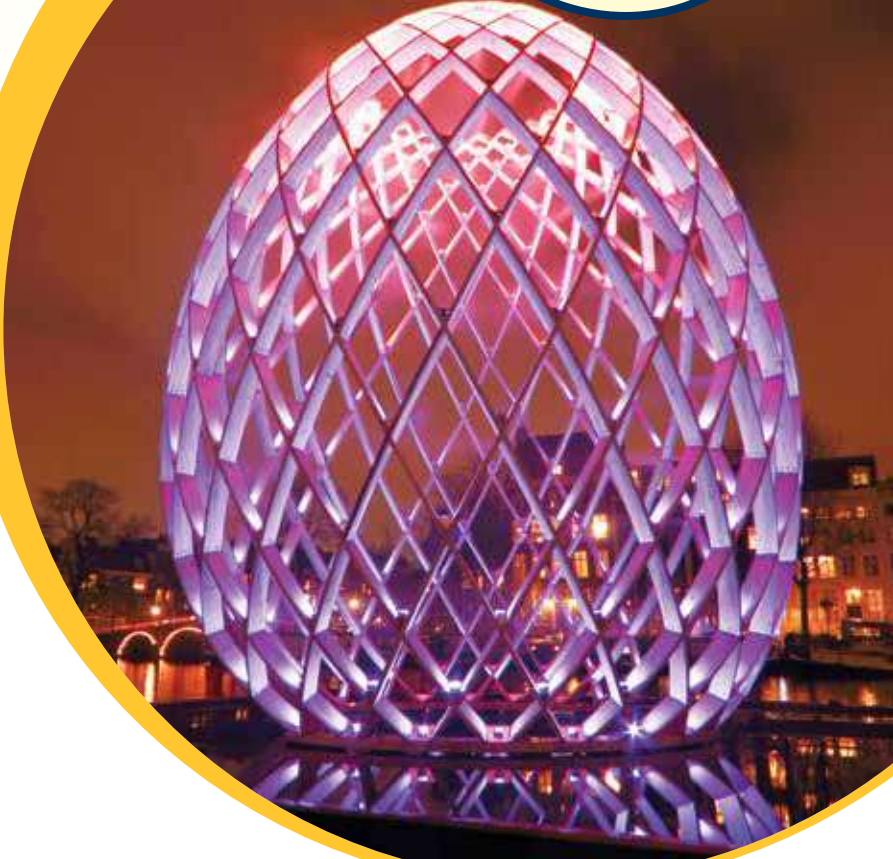
النوع	سعر الأوقية
الفسق	JD 4
اللوز	JD 1.5

إذا كانت كمية الفستق تساوي ثلاثة أمثال كمية اللوز في الأوقية الواحدة في الخليط المبيع، فأجد كمية كل من اللوز والفسق المباعة.

الأشكال ثنائية الأبعاد

ما أهمية هذه الوحدة؟

للأشكال الهندسية أنواع كثيرة وخصائص لا يمكن حصرها؛ لذا تُستعمل في مجالات حياتية وعلمية شتى. ولا يمكن إنتاج أي تصميم أو عمل فني أو معماري من دون استعمال خصائص الأشكال الهندسية، وهذا يعني أنه لا بد من فهم هذه الخصائص قبل البدء بأي تصميم.



سأتعلم في هذه الوحدة:

- تحديد المثلثات المتشابهة باستعمال حالات التشابه AA و SSS و SAS
- خصائص أضلاع وزوايا وأقطار متوازي الأضلاع، وحالاته الخاصة.
- رسم صورة مضلع تحت تأثير تمدد في المستوى الإحداثي.

تعلمت سابقاً:

- ✓ تصنيف الأشكال الرباعية حسب خواصها الأساسية.
- ✓ العلاقة بين الأضلاع والزوايا المتناظرة في مضلعين متشابهين.
- ✓ رسم مضلع تحت تأثير تكبير.



مشروع الوحدة: المنساح

4 أُنقُب الطرف الآخر في كلٍّ من القطعتين القصيرتين، وأضع إحداهما فوق الأخرى بحيث ينطبق الثقبان، ثم أُنقُب الطرف الآخر لكلٍّ من القطعتين الطويلتين.

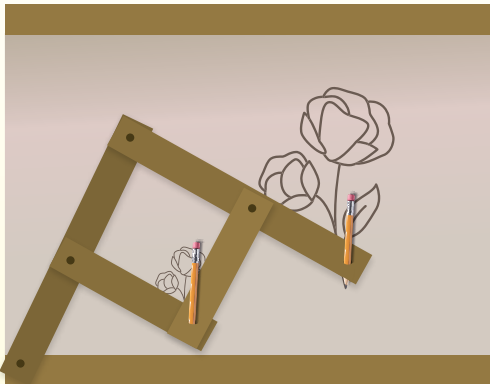
5 أرسم على ورقة خارجية متوازي أضلاع بأبعادٍ محدَّدة، وأضع الورقة تحت أحد قلمي الرصاص، وأتبع محيط المتوازي، ثم ألاحظ الرسم الناتج من القلم الآخر.

6 أحدد العلاقة بين الرسمين من حيث: أطوال الأضلاع، وقياسات الزوايا.

7 أكرِّر الخطوتين 8 و 9 باختيار أشكالٍ رباعيةٍ مختلفة.

عرض النتائج:

- أعرض المنساح الذي صمَّمته أمام طلبة صفِّي، وأوضح أهميته وعلاقته بما تعلَّمته في الوحدة.
- أعدُّ عرضاً تقديمياً، وأتحدث بالتفصيل عن خطوات تصميم المنساح والنتائج التي توصَّلت إليها.



أستعدُّ ومجموعتي لتنفيذ مشروعنا الخاص، الذي سنوظف فيه ما نتعلَّمه في هذه الوحدة لتصميم أداة هندسية تُسمَّى المنساح.

المواد والأدوات:

- لوحتان من الكرتون المقوى.
- ورقة كبيرة.
- دبائيس ومثقب.

خطوات تنفيذ المشروع:



أشاهد المقطع المرئي (الفيديو) في الرمز المجاور، ثم أنفذ الخطوات الآتية:

- 1 أقصُّ أربع قطع مستطيلة الشكل من الكرتون المقوى: قطعتين طول كلٍّ منهما 20 cm، وقطعتين أخريين طول كلٍّ منهما 10 cm، وعرض كلٍّ قطعةٍ منها 2.5 cm.
- 2 أستعمل المثقب لصنع فتحات في طرف كلٍّ من القطعتين الطويلتين، وأربط بينهما من خلال الثقبتين باستعمال الدبائيس.
- 3 أستعمل المثقب لصنع فتحات في منتصف كلٍّ من القطعتين الطويلتين وطرف كلٍّ من القطعتين القصيرتين، وأصل بين القطعتين القصيرتين والطويلتين بالدبائيس.

أستكشف



يبيّن الشكل المجاور سلّمًا كلّ درجة من درجاته عمودية على الدعامتين الرئيسيتين.

(1) هل الدعامتان الرئيسيتان متوازيتان؟ أبرّر إجابتي.

(2) هل الدرجات جميعها متوازية؟ أبرّر إجابتي.



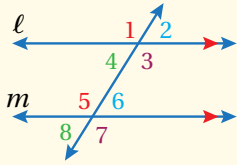
فكرة الدرس

أميّز المستقيمتين المتوازيتين والمتعامدة بناءً على علاقات بين أزواج من الزوايا الناتجة عن مستقيم قاطع.

تعلّمت سابقاً أنّه إذا قطع مستقيم مستقيمتين متوازيتين في المستوى نفسه، فإنّ هذا يقود إلى النظريات الآتية حول العلاقة بين أزواج الزوايا الناتجة عن هذا التقاطع.

نظريات المستقيمتين المتوازيتين وأزواج الزوايا

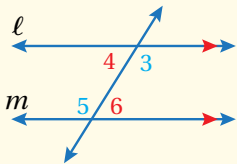
مراجعة المفهوم



مسألة الزاويتين المتناظرتين

إذا قطع قاطع مستقيمتين متوازيتين، فإنّ كلّ زاويتين متناظرتين متطابقتان.

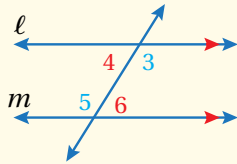
مثال: $\angle 1 \cong \angle 5$ و $\angle 2 \cong \angle 6$ و $\angle 4 \cong \angle 8$ و $\angle 3 \cong \angle 7$



نظرية الزاويتين المتبادلتين داخلياً

إذا قطع قاطع مستقيمتين متوازيتين، فإنّ كلّ زاويتين متبادلتين داخلياً متطابقتان.

مثال: $\angle 3 \cong \angle 5$ و $\angle 4 \cong \angle 6$

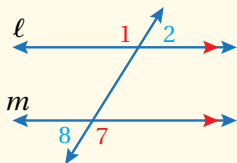


نظرية الزاويتين المتحالفتين

إذا قطع قاطع مستقيمتين متوازيتين، فإنّ كلّ زاويتين متحالفتين متكاملتان.

مثال: $m\angle 4 + m\angle 5 = 180^\circ$

$m\angle 3 + m\angle 6 = 180^\circ$



نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجياً

إذا قطع قاطع مستقيمتين متوازيتين، فإنّ كلّ زاويتين متبادلتين خارجياً متطابقتان.

مثال: $\angle 1 \cong \angle 7$ و $\angle 2 \cong \angle 8$

الوحدة 7

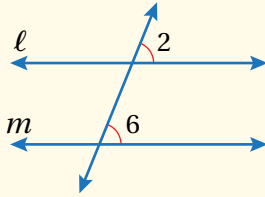
سأتعلم في هذا الدرس كيفية استعمال أزواج الزوايا الناتجة عن مستقيمين يقطعهما قاطع في المستوى نفسه لإثبات توازيهما، فمثلاً، تكون الزوايا المتناظرة متطابقة حين يكون المستقيمان متوازيين، وعكس هذه المسألة صحيح أيضاً.

عكس مسّمة الزاويتين المتناظرتين

مسّمة

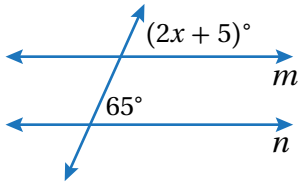


إذا قطع قاطع مستقيمين، ونج عن التقاطع زاويتان متناظرتان متطابقتان، فإن المستقيمين متوازيان.



مثال: إذا كانت $\angle 2 \cong \angle 6$ فإن $l \parallel m$

مثال 1



أجد قيمة x التي تجعل $n \parallel m$.

يكون المستقيمان m و n متوازيين إذا كانت الزاويتان المتناظرتان متطابقتين.

$$(2x + 5)^\circ = 65^\circ \quad \text{أستعمل عكس مسّمة الزاويتين المتناظرتين لكتابة معادلة}$$

$$2x + 5 = 65 \quad \text{أكتب المعادلة من دون رمز الدرجة}$$

$$2x = 60 \quad \text{أطرح 5 من طرفي المعادلة}$$

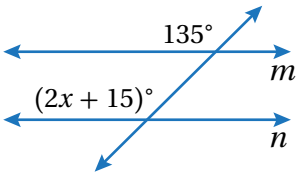
$$x = 30 \quad \text{أقسم طرفي المعادلة على 2}$$

إذن، قيمة x التي تجعل المستقيمين m و n متوازيين تساوي 30

أتحقق من فهمي:

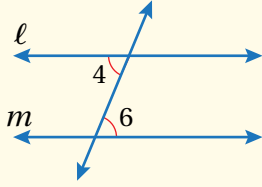


أجد قيمة x التي تجعل $n \parallel m$.



يمكن أن تحدّد أزواج الزوايا الناتجة عن مستقيمين يقطعهما قاطع في المستوى نفسه ما إذا كان المستقيمان متوازيين أم لا.

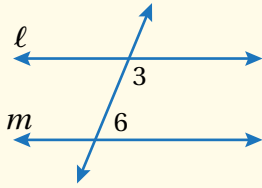
• عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين داخلياً



إذا قطع قاطعٌ مستقيمين، ونتجَ عن التقاطع زاويتان متبادلتان داخلياً متطابقتان، فإنَّ المستقيمين متوازيان.

مثال: إذا كانت $\angle 4 \cong \angle 6$ فإن $\ell \parallel m$

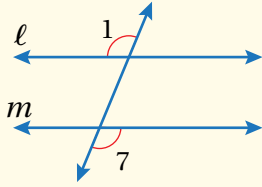
• عكس نظرية الزاويتين المتحالفتين



إذا قطع قاطعٌ مستقيمين، ونتجَ عن التقاطع زاويتان متحالفتان متكاملتان، فإنَّ المستقيمين متوازيان.

مثال: إذا كانت $m\angle 3 + m\angle 6 = 180^\circ$ فإن $\ell \parallel m$

• عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجياً

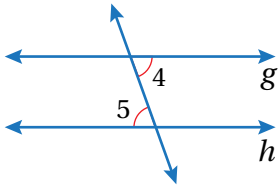


إذا قطع قاطعٌ مستقيمين، ونتجَ عن التقاطع زاويتان متبادلتان خارجياً متطابقتان، فإنَّ المستقيمين متوازيان.

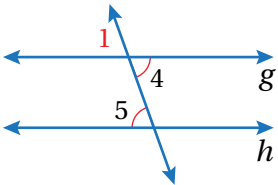
مثال: إذا كانت $\angle 1 \cong \angle 7$ فإن $\ell \parallel m$

يمكن استعمال عكس مسلّمة الزاويتين المتناظرتين لإثبات النظريات السابقة.

مثال 2: إثبات نظرية

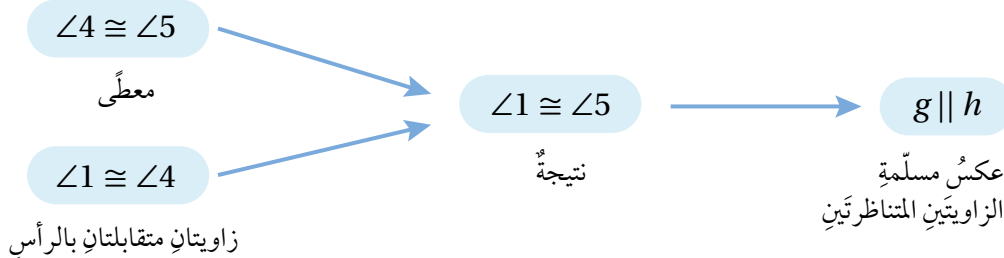


في الشكل المجاور، إذا كان $\angle 4 \cong \angle 5$ فأثبت أن $g \parallel h$ باستعمال المخطط السهمي. أخطّط للحلّ باتّباع الخطوات الآتية:



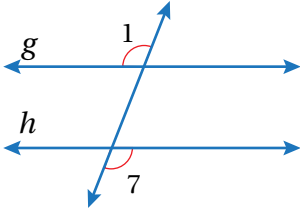
الخطوة 1 أسّمي $\angle 1$ التي تقابل بالرأس $\angle 4$

الخطوة 2 أسّعمل تطابق الزوايا الناتج عن التقابل بالرأس في إثبات توازي المستقيمين.



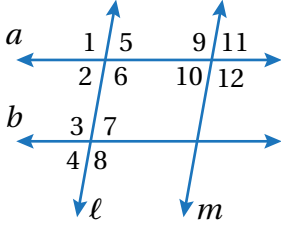
الوحدة 7

أتحقق من فهمي:



في الشكل المجاور، إذا كان $\angle 1 \cong \angle 7$ فأثبت أن $g \parallel h$ باستعمال المخطط السهمي.

مثال 3



هل يمكن إثبات أن أيًا من مستقيمتي الشكل المجاور متوازية اعتمادًا على المعطيات في كل مما يأتي؟ أبرر إجابتني باستعمال مسلمة أو نظرية.

1 $\angle 1 \cong \angle 8$

$\angle 1$ و $\angle 8$ متبادلتان خارجيًا بالنسبة للمستقيمتين a و b ، وبما أن $\angle 1 \cong \angle 8$ فإن $a \parallel b$ بحسب عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجيًا.

2 $m\angle 5 + m\angle 9 = 180^\circ$

$\angle 5$ و $\angle 9$ متحالفتان بالنسبة للمستقيمتين m و ℓ ، وبما أن $m\angle 5 + m\angle 9 = 180^\circ$ فإن $m \parallel \ell$ بحسب عكس نظرية الزاويتين المتحالفتين.

أتحقق من فهمي:



3 $\angle 7 \cong \angle 2$

4 $\angle 6 \cong \angle 12$

5 $m\angle 3 + m\angle 2 = 180^\circ$

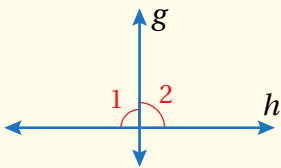
في ما يأتي بعض النظريات المتعلقة بالمستقيمت المتعامدة، إضافة إلى نظريات خاصة تنتج حين يكون قاطع المستقيمتين عموديًا عليهما:

نظرية الزاويتين المتجاورتين المتطابقتين

نظرية



• نظرية الزاويتين المتجاورتين المتطابقتين



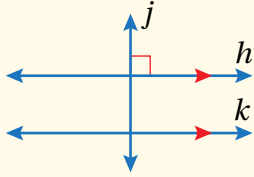
إذا تقاطع مستقيمان لتشكيل زاويتين متجاورتين متطابقتين، فإن المستقيمتين متعامدان.

مثال: إذا كانت $\angle 1 \cong \angle 2$ فإن $g \perp h$

نظرية القاطع العمودي وعكسها

نظريات

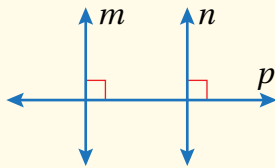
• نظرية القاطع العمودي



إذا كان مستقيم عمودياً على أحد مستقيمين متوازيين، فإنه يكون عمودياً على المستقيم الآخر.

مثال: إذا كان $h \parallel k$ و $h \perp j$ ، فإن $j \perp k$

• عكس نظرية القاطع العمودي



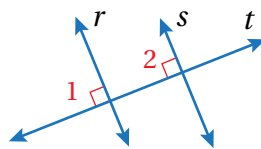
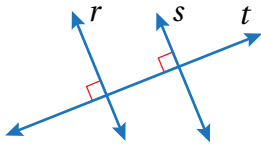
إذا قطع قاطع مستقيمين وكان عمودياً على كل منهما، فإن المستقيمين متوازيين.

مثال: إذا كان $p \perp m$ و $p \perp n$ فإن $m \parallel n$

مثال 4: إثبات نظرية



أستعمل المعلومات المعطاة في الشكل المجاور لأثبت أن $r \parallel s$ باستعمال البرهان ذي العمودين.

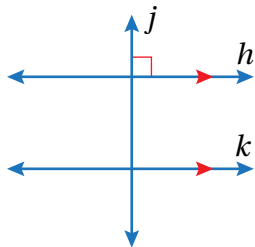


المبررات	العبارات
(1) معطى.	(1) $\angle 1$ و $\angle 2$ قائمتان
(2) الزوايا القائمة متطابقة	(2) $\angle 1 \cong \angle 2$
(3) عكس مسلمة الزاويتين المتناظرتين	(3) $r \parallel s$

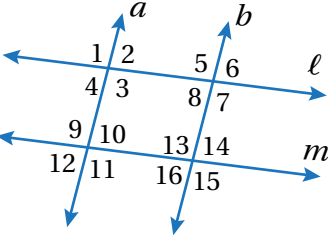
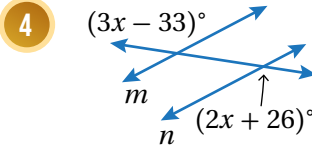
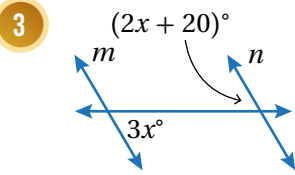
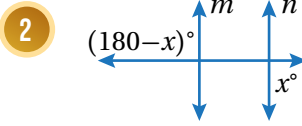
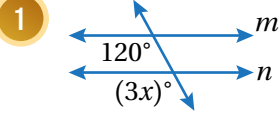
✓ أتتحقق من فهمي:



أستعمل المعلومات المعطاة في الشكل المجاور؛ لأثبت أن $j \perp k$ باستعمال البرهان ذي العمودين.



أجد قيمة x التي تجعل $m \parallel n$ في كل مما يأتي:



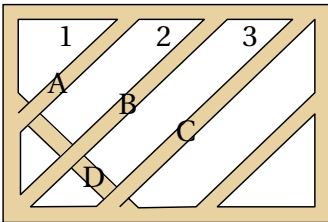
هل يمكن إثبات أن أيًا من مستقيمتي الشكل المجاور متوازية اعتمادًا على المعطيات في كل مما يأتي؟ أبرر إجابتني باستعمال مسلمة أو نظرية.

5 $\angle 2 \cong \angle 8$

6 $\angle 9 \cong \angle 15$

7 $\angle 6 \cong \angle 16$

8 $m\angle 10 + m\angle 13 = 180^\circ$



عريش خشبي: صمم نجار عريشًا خشبيًا خاصًا بنمو النباتات المتسلقة يتكوّن من قطع خشبية مرتبة بشكل قطري.

يحتاج النجار إلى أن تكون القطع الخشبية A و B و C متوازية، فكيف يحقق ذلك من خلال $\angle 1$ و $\angle 2$ و $\angle 3$ ؟

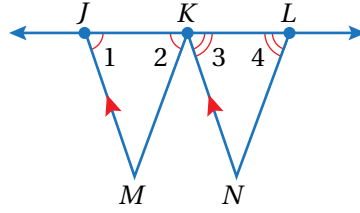
وصل النجار القطعة الخشبية D بحيث تكون عمودية على القطعة الخشبية A ، فهل القطعة D عمودية على القطعتين B و C ، علمًا بأن النجار جعل القطع الخشبية A و B و C متوازية؟ أبرر إجابتني.

أتذكر

أستعمل خصائص المساواة لحل معادلات تحتوي متغيرات في طرفيها.

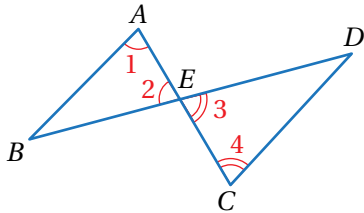
11

أستعملُ المعلوماتَ المعطاةَ في الشكلِ الآتي؛ لأثبتَ أنَّ $\overline{KM} \parallel \overline{LN}$ باستعمالِ البرهانِ ذي العمودين.



12

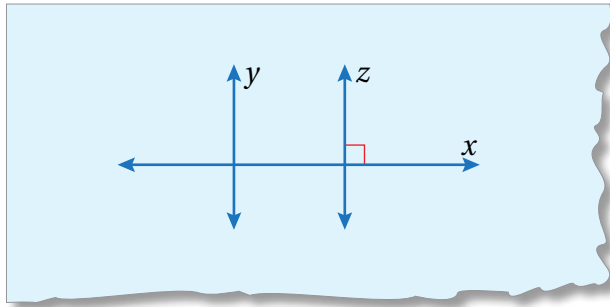
في الشكلِ الآتي، إذا كانت $\angle 1 \cong \angle 2$ و $\angle 3 \cong \angle 4$ ، فأثبتَ أنَّ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ باستعمالِ البرهانِ السهميِّ.



مهاراتُ التفكيرِ العليا

13

أكتشفُ الخطأ: يقولُ زيادٌ: بما أنَّ $x \perp z$ فإنَّ $y \parallel z$ في الشكلِ الآتي بحسبِ نظريةِ عكسِ القاطعِ العموديِّ. أكتشفُ الخطأَ في ما يقوله زيادٌ، وأصحِّحُه.



تحدُّ: أحدِّدُ المستقيماتِ المتوازيةَ في الشكلِ الرباعيِّ $QLMN$ في كلِّ ممَّا يأتي، مبرِّراً إجابتي:

14 $m\angle Q = 72^\circ, m\angle L = 108^\circ, m\angle M = 72^\circ, m\angle N = 108^\circ$

15 $m\angle Q = 59^\circ, m\angle L = 37^\circ, m\angle M = 143^\circ, m\angle N = 121^\circ$

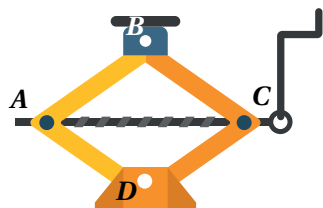
إرشادٌ

أرسمُ شكلاً توضيحياً لكلِّ مِنَ الشكلينِ الرباعيَّينِ الواردينِ في السؤالينِ 14 و 15 وفقِ المعلوماتِ المعطاةِ.

16

أكتبُ: كيفَ يمكنُ أن تحدِّدَ أزواجَ الزوايا الناتجةَ عن مستقيمينِ يقطعُهما قاطعٌ في المستوى نفسه ما إذا كانَ المستقيمانِ متوازيينِ أم لا؟

أستكشف



يبيّن الشكل المجاور رافعة سيارات:

(1) ما اسم الشكل الرباعي $ABCD$ ؟

(2) ما العلاقة بين $\angle A$ و $\angle C$ ؟

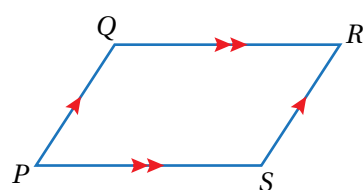
(3) ما العلاقة بين $\angle B$ و $\angle D$ ؟

فكرة الدرس

أتعرّف خصائص أضلاع وزوايا وأقطار متوازي الأضلاع.

المصطلحات

متوازي الأضلاع، الزوايا المتحالفة



متوازي الأضلاع (parallelogram) هو شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين

متوازيان، ويُرمزُ إليه بالرمز \square

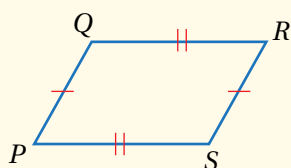
ففي $\square PQRS$ المبيّن جانباً $\overline{PQ} \parallel \overline{SR}$ و $\overline{QR} \parallel \overline{PS}$ بحسب التعريف.

وتقدّم النظريات الآتية خصائص أخرى لمتوازي الأضلاع.

خصائص متوازي الأضلاع (1)

نظريات

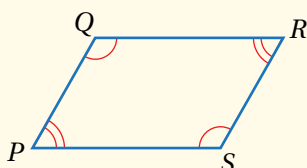
• نظرية الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع



إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع، فإن الأضلاع المتقابلة متطابقة.

مثال: إذا كان $PQRS$ متوازي أضلاع، فإن $\overline{PQ} \cong \overline{SR}$, $\overline{QR} \cong \overline{PS}$

• نظرية الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع

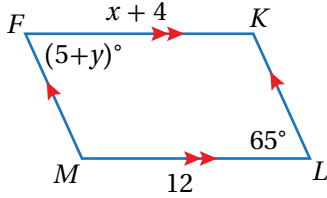


إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع، فإن الزوايا المتقابلة متطابقة.

مثال: إذا كان $PQRS$ متوازي أضلاع، فإن $\angle P \cong \angle R$, $\angle Q \cong \angle S$

يمكن استعمال الخصائص السابقة لمتوازي الأضلاع لإيجاد قيم مجهولة.

مثال 1



أجد قيمة كل من x و y في الشكل المجاور.

بما أن كل ضلعين متقابلين متوازيين في الشكل الرباعي $FKLM$ فإنه متوازي أضلاع، ومنه فإنه يمكنني استعمال نظرية الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع لإيجاد قيمة x .

$$\overline{FK} \cong \overline{ML}$$

$$FK = ML$$

$$x + 4 = 12$$

$$x = 8$$

الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة

تعريف تطابق القطع المستقيمة

$$FK = x + 4, ML = 12$$

أطرح 4 من طرفي المعادلة

إذن، قيمة x تساوي 8

ويمكنني إيجاد قيمة y باستعمال نظرية الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع.

$$\angle F \cong \angle L$$

$$m\angle F = m\angle L$$

$$(5 + y)^\circ = 65^\circ$$

$$5 + y = 65$$

$$y = 60$$

الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة

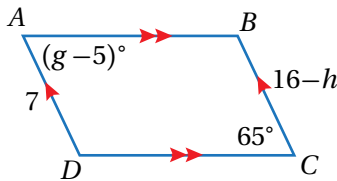
تعريف تطابق الزوايا

$$m\angle F = (5 + y)^\circ, m\angle L = 65^\circ$$

أكتب المعادلة من دون رمز الزاوية

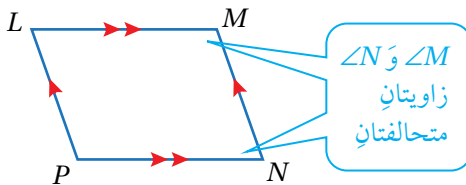
أطرح 5 من طرفي المعادلة

إذن، قيمة y تساوي 60



✓ **أتحقق من فهمي:**

أجد قيمة كل من g و h في الشكل المجاور.



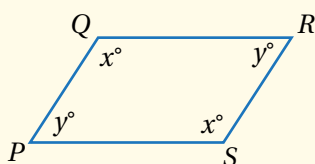
تسمى زوايا المضلع التي تشترك في الضلع نفسه زوايا متحالفة

(consecutive angles). فمثلاً، في الشكل المجاور $\angle N$ و $\angle M$

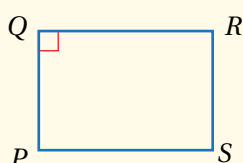
زاويتان متحالفتان؛ لأنهما تشتركان في الضلع \overline{MN} .

وتقدم النظريات الآتية خصائص أخرى لمتوازي الأضلاع تتعلق بالزوايا المتحالفة.

خصائص متوازي الأضلاع (2)

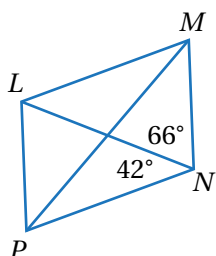


- نظرية الزوايا المتحالفة في متوازي الأضلاع
إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع، فإن كل زاويتين متحالفتين متكاملتان.
مثال: إذا كان $PQRS$ متوازي أضلاع، فإن $x^\circ + y^\circ = 180^\circ$



- نظرية الزاوية القائمة في متوازي الأضلاع
إذا كانت إحدى زوايا متوازي الأضلاع قائمة، فإن زواياه الأربع قوائم.
مثال: في $PQRS$ إذا كانت $\angle Q$ قائمة فإن:
 $\angle P, \angle S, \angle R$ قوائم أيضًا.

مثال 2



- في الشكل المجاور، إذا كان $LMNP$ متوازي أضلاع، فأجد $m\angle LMN$ و $m\angle PLM$
- أجد $m\angle PLM$

$$m\angle MNP = 66^\circ + 42^\circ = 108^\circ$$

$$m\angle PLM = m\angle MNP$$

$$m\angle PLM = 108^\circ$$

أجمع قياسي الزاويتين

الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة

$$m\angle MNP = 108^\circ \text{ أعوض}$$

إذن، $m\angle PLM$ تساوي 108°

- أجد $m\angle LMN$

$$m\angle MNP + m\angle LMN = 180^\circ$$

$$108^\circ + m\angle LMN = 180^\circ$$

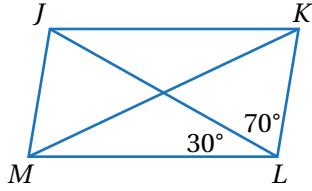
$$m\angle LMN = 72^\circ$$

زاويتان متحالفتان في متوازي أضلاع

$$m\angle MNP = 108^\circ \text{ أعوض}$$

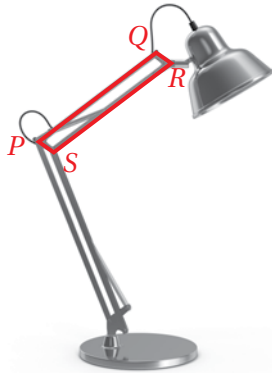
أطرح 108° من كلا الطرفين

إذن، $m\angle LMN$ تساوي 72°



✓ **أتحقق من فهمي:**

في الشكل المجاور، إذا كان $JKLM$ متوازي أضلاع، فأجد $m\angle MJK$ و $m\angle JKL$



🌍 **مثال 3: من الحياة**

إضاءة: يبين الشكل المجاور جزءاً من مصباح مكتب على شكل متوازي أضلاع، وتتغير زواياه عند رفعه وخفضه. أجد $m\angle QRS$ إذا علمت أن $m\angle PSR = 100^\circ$

$$m\angle QRS + m\angle PSR = 180^\circ$$

$$m\angle QRS + 100^\circ = 180^\circ$$

$$m\angle QRS = 80^\circ$$

زاويتان متحالتان في متوازي أضلاع

$$m\angle PSR = 100^\circ \text{ أعوض}$$

أطرح 100° من كلا الطرفين

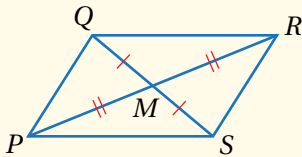
✓ **أتحقق من فهمي:**

أفترض أن مصباح المكتب عدّل لتصبح $m\angle PSR = 86^\circ$ ، أجد $m\angle QRS$

تعلمت في الأمثلة السابقة خصائص متوازي الأضلاع المتعلقة بأضلاعه وزواياه، وهناك أيضاً بعض الخصائص المتعلقة بقطريه.

قُطرا متوازي الأضلاع

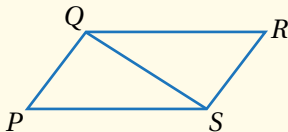
نظريات



• **نظرية قُطري متوازي الأضلاع**

إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع، فإن قُطريه ينصف كل منهما الآخر.

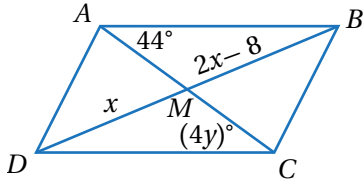
مثال: إذا كان $PQRS$ متوازي أضلاع، فإن $\overline{QM} \cong \overline{SM}$ ، $\overline{PM} \cong \overline{RM}$



• **نظرية قُطر متوازي الأضلاع**

إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع، فإن كل قُطر يقسمه إلى مثلثين متطابقين.

مثال: إذا كان $PQRS$ متوازي أضلاع، فإن $\triangle PQS \cong \triangle RSQ$



إذا كان $ABCD$ متوازي أضلاع، فأجد قيمة كل من x و y

• أجد قيمة x

$\overline{DM} \cong \overline{BM}$ قُطرا متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر

$DM = BM$ تعريف تطابق القطع المستقيمة

$x = 2x - 8$ أعوض

$-x = -8$ أطرح $2x$ من طرفي المعادلة

$x = 8$ أقسم طرفي المعادلة على -1

• أجد قيمة y

$\triangle DAC \cong \triangle BCA$ قُطر متوازي الأضلاع يقسمه إلى مثلثين متطابقين

$\angle ACD \cong \angle CAB$ الزوايا المتناظرة في المثلثات المتطابقة تكون متطابقة

$m\angle ACD = m\angle CAB$ تعريف تطابق الزوايا

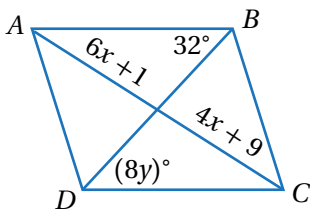
$(4y)^\circ = 44^\circ$ أعوض

$4y = 44$ أكتب المعادلة من دون رمز الدرجة

$y = 11$ أقسم طرفي المعادلة على 4

أفكر

هل يمكن إيجاد قيمة y بطريقة أخرى؟

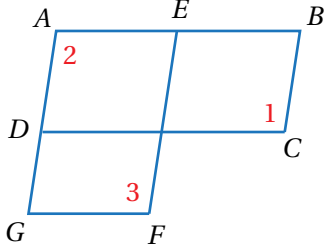


✓ **أتحقق من فهمي:**

إذا كان $ABCD$ متوازي أضلاع، فأجد قيمة كل من x و y

يمكن استعمال خصائص متوازي الأضلاع لبرهنة علاقات في أشكال هندسية مركبة.

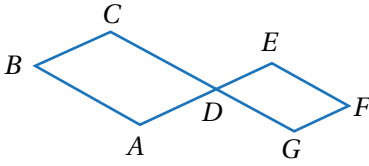
مثال 5



في الشكل المجاور، إذا كان $ABCD$ و $AEFG$ متوازي أضلاع، فأثبت أن $\angle 1 \cong \angle 3$ باستعمال البرهان ذي العمودين.

المبررات	العبارات
(1) معطى.	(1) $ABCD$ و $AEFG$ متوازي أضلاع
(2) الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة.	(2) $\angle 1 \cong \angle 2$
(3) الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة.	(3) $\angle 2 \cong \angle 3$
(4) بما أن $\angle 1 \cong \angle 2$ و $\angle 2 \cong \angle 3$	(4) $\angle 1 \cong \angle 3$

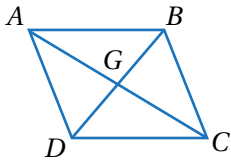
✓ **أتحقق من فهمي:**



في الشكل المجاور، إذا كان $ABCD$ و $GDEF$ متوازي أضلاع، فأثبت أن $\angle B \cong \angle F$ باستعمال البرهان ذي العمودين.

أدرب وأحل المسائل

أكمل كل جملة مما يأتي في ما يتعلق بـ $ABCD$ مبرراً إجابتي:

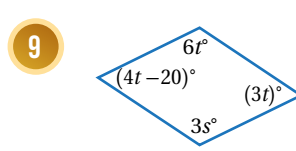
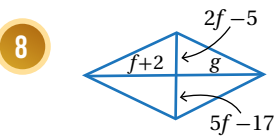
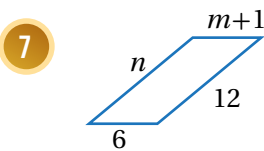


1 $\angle DAB \cong \dots\dots\dots$ 2 $\angle ABD \cong \dots\dots\dots$

3 $\overline{AB} \parallel \dots\dots\dots$ 4 $\overline{BC} \parallel \dots\dots\dots$

5 $\triangle ABD \cong \dots\dots\dots$ 6 $\triangle ACD \cong \dots\dots\dots$

أجد قيمة كل متغير في كل من متوازيات الأضلاع الآتية:



الوحدة 7

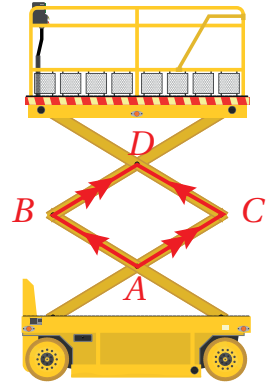
رافعة: أستخدم الشكل المجاور الذي يبين رافعة المقص للإجابة عن الأسئلة الآتية:

إذا كان $m\angle A = 120^\circ$ ، فأجد $m\angle B$.

إذا قل $m\angle A$ ، فما تأثير ذلك في $m\angle B$ ؟

إذا قل $m\angle A$ ، فما تأثير ذلك في طول \overline{AD} ؟

إذا قل $m\angle A$ ، فما تأثير ذلك في ارتفاع الرافعة؟

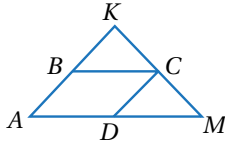


15 في الشكل الآتي، إذا كان $ABCD$

متوازي أضلاع و $\overline{AK} \cong \overline{MK}$

فأثبت أن $\angle BCD \cong \angle CMD$

باستعمال البرهان ذي العمودين.



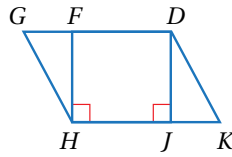
14 في الشكل الآتي، إذا كان $GDKH$

متوازي أضلاع، فأستخدم المعلومات

المعطاة على الشكل؛ لا ثبت أن

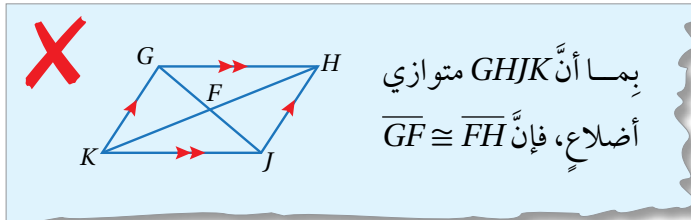
$\triangle DJK \cong \triangle HFG$ باستعمال البرهان

ذو العمودين.



مهارات التفكير العليا

16 **أكتشف الخطأ:** أنظر الحل الآتي، وأكتشف الخطأ الوارد فيه، وأصححه.



بما أن $GHJK$ متوازي

أضلاع، فإن $\overline{GF} \cong \overline{FH}$

17 **تبرير:** تمثل المقادير الجبرية أدناه أطوال أضلاع $\square MNPQ$. أجد محيط متوازي

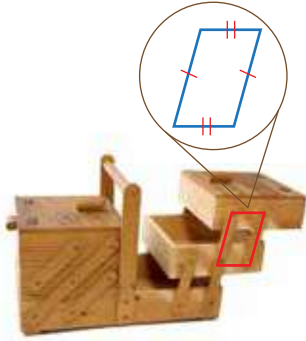
الأضلاع، مبرراً إجابتي.

$$MQ = -2x + 37 \quad QP = y + 14 \quad NP = x - 5 \quad MN = 4y + 5$$

18 **أكتب:** ما خصائص متوازي الأضلاع المتعلقة بزواياه وأضلاعه وأقطاره؟

أتذكر

المحيط يساوي مجموع أطوال الأضلاع.



أستكشف

هل تبقى رفوف الصندوق موازية لبعضها بعضاً بغض النظر عن موقعها؟
أبرر إجابتي.

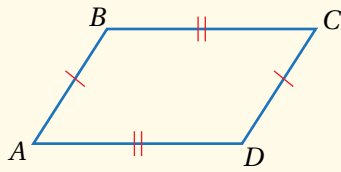
فكرة الدرس

أتعرف الشروط التي تؤكد أن شكلاً رباعياً متوازي أضلاع.

تعلمت في الدرس السابق نظريات حول خصائص متوازي الأضلاع، وسأتعلم في هذا الدرس عكس هذه النظريات، بحيث يمكن تحديد ما إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع أم لا إذا كانت أضلاعه وزواياه وأقطاره لها خصائص معينة.

شروط متوازي الأضلاع (1)

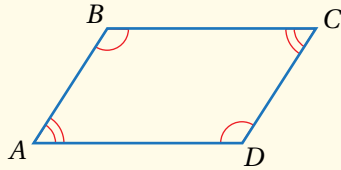
مفهوم أساسي



عكس نظرية الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع

إذا كان كل ضلعين متقابلين متطابقين في الشكل الرباعي، فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

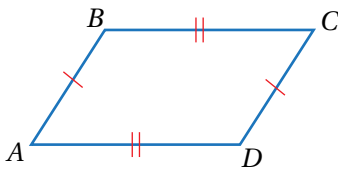
مثال: إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{DC}$, $\overline{BC} \cong \overline{AD}$ فإن $ABCD$ متوازي أضلاع.



عكس نظرية الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع

إذا كانت كل زاويتين متقابلتين متطابقتان في الشكل الرباعي، فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

مثال: إذا كان $\angle A \cong \angle C$, $\angle B \cong \angle D$ فإن الشكل الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.

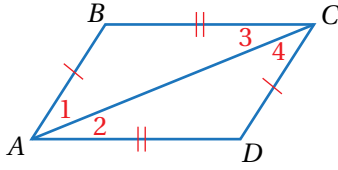


مثال 1: برهان نظرية

في الشكل المجاور، إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ و $\overline{BC} \cong \overline{AD}$ ، فأثبت أن $ABCD$ متوازي أضلاع باستعمال البرهان ذي العمودين.

الوحدة 7

أحطط للبرهان باتباع الخطوات الآتية:



الخطوة 1 أرسم القطر \overline{AC} ، لينتج $\triangle ABC$ و $\triangle CDA$

الخطوة 2 أستعمل حالة تطابق مثلثين بثلاثة أضلاع (SSS)؛ لأثبت أن

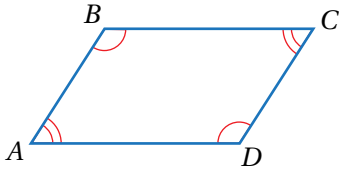
$$\triangle ABC \cong \triangle CDA$$

الخطوة 3 أستعمل الزوايا المتبادلة داخلياً؛ لأثبت أن الأضلاع المتقابلة متوازية.

البرهان:

المبررات	العبارات
(1) معطى.	(1) $\overline{BC} \cong \overline{DA}$ و $\overline{AB} \cong \overline{CD}$
(2) ضلع مشترك.	(2) \overline{AC}
(3) SSS	(3) $\triangle ABC \cong \triangle CDA$
(4) زوايا متناظرة في مثلثين متطابقين.	(4) $\angle 1 \cong \angle 4$ و $\angle 3 \cong \angle 2$
(5) عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين داخلياً.	(5) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ و $\overline{BC} \parallel \overline{DA}$
(6) تعريف متوازي الأضلاع.	(6) $ABCD$ متوازي أضلاع

أتحقق من فهمي:



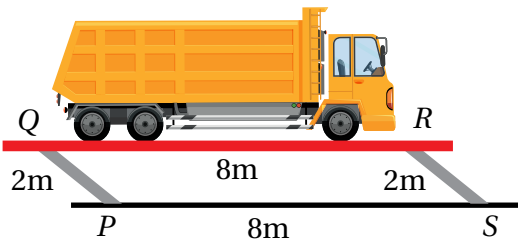
في الشكل المجاور، إذا كان $\angle A \cong \angle C$, $\angle B \cong \angle D$ فأثبت أن $ABCD$ متوازي أضلاع.

يمكن استعمال شروط متوازي الأضلاع لتوضيح علاقات من واقع الحياة.

مثال 2: من الحياة



رافعة: يبين الشكل المجاور رافعة للمركبات الثقيلة:



1 هل الشكل الرباعي $QRSP$ متوازي أضلاع؟ أبرر إجابتي.

بما أن كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي $QRSP$ متطابقان، فإنه متوازي أضلاع.

2 هل الشاحنة موازية للأرض؟ أبرر إجابتي.

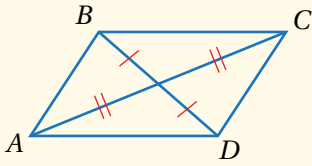
بما أن $QRSP$ متوازي أضلاع، فإن $QR \parallel PS$ ، وبما أن QR يمثل المنصبة التي تستقر عليها الشاحنة، و PS يقع على الأرض، فإن الشاحنة موازية للأرض.

✓ **أتحقق من فهمي:**

3 ما أقصى ارتفاع يمكن أن ترفع الرافعة الشاحنة إليه؟ أبرر إجابتي.

شروط متوازي الأضلاع (2)

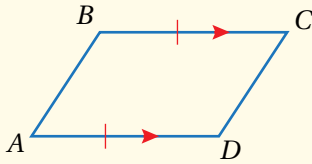
مفهوم أساسي



• عكس نظرية قطري متوازي الأضلاع

إذا كان قطرا شكل رباعي ينصف كل منهما الآخر، فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

مثال: إذا كان \overline{AC} و \overline{BD} ينصف كل منهما الآخر، فإن $ABCD$ متوازي أضلاع.



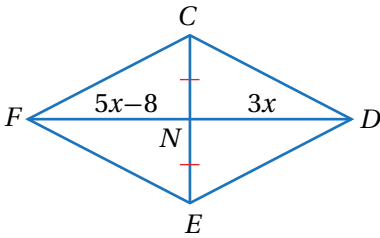
• نظرية الأضلاع المتوازية والمتطابقة

إذا توازي وتطابق ضلعان متقابلان في شكل رباعي، فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

مثال: إذا كان $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ و $\overline{BC} \cong \overline{AD}$ فإن $ABCD$ متوازي أضلاع.

يمكن استعمال شروط متوازي الأضلاع لإيجاد القيم المجهولة التي تجعل الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

مثال 3



أجد قيمة x التي تجعل الشكل الرباعي $FCDE$ المجاور متوازي أضلاع.

بناءً على عكس نظرية قطري متوازي الأضلاع، فإنه إذا كان قطرا شكل رباعي ينصف كل منهما الآخر، فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع، وبما أنه معطى في

الشكل أن $\overline{CN} \cong \overline{EN}$ ، أجد قيمة x التي تجعل $\overline{FN} \cong \overline{DN}$

$$FN = DN$$

$$5x - 8 = 3x$$

$$2x - 8 = 0$$

$$2x = 8$$

$$x = 4$$

تعريف تطابق القطع المستقيمة

أعوّض

أطرح $3x$ من طرفي المعادلة

أجمع 8 إلى طرفي المعادلة

أقسم طرفي المعادلة على 2

عندما $x = 4$ ، فإن:

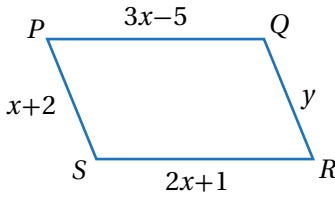
$$FN = 5(4) - 8 = 12, \quad DN = 3(4) = 12$$

إذن، عندما تكون $x = 4$ ، يكون الشكل الرباعي $FCDE$ متوازي أضلاع.

أتحقق من فهمي:



أجد قيمتي x و y اللتين تجعلان الشكل الرباعي $PQRS$ المجاور متوازي أضلاع.



طرائق إثبات أن الشكل الرباعي متوازي أضلاع

ملخص المفهوم



يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا حقق أيًا من الشروط الآتية:

- (1) إذا كان كل ضلعين متقابلين فيه متوازيين. (التعريف).
- (2) إذا كان كل ضلعين متقابلين فيه متطابقين. (عكس نظرية الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع).
- (3) إذا كانت كل زاويتين متقابلتين فيه متطابقتين. (عكس نظرية الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع).
- (4) إذا كان قطراه ينصف كل منهما الآخر. (عكس نظرية قطري متوازي الأضلاع).
- (5) إذا كان فيه ضلعان متقابلان متوازيان ومتطابقان. (نظرية الأضلاع المتوازية والمتطابقة).

يمكن استعمال الميل لتحديد ما إذا كان الشكل الرباعي في المستوى الإحداثي متوازي أضلاع أم لا.

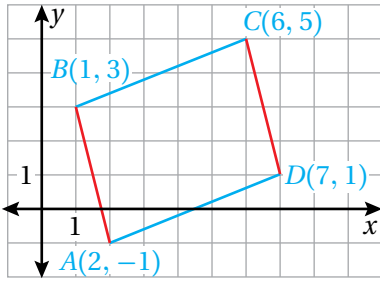
مثال 4

أثبت أن $A(2, -1)$, $B(1, 3)$, $C(6, 5)$, $D(7, 1)$ تمثل رؤوس متوازي أضلاع.

يمكن إثبات أن الأضلاع المتقابلة متوازية إذا كان لها الميل نفسه.

الخطوة 1 أمثل الشكل الرباعي في المستوى الإحداثي.

الخطوة 2 أجد ميل كل ضلع من أضلاع الشكل الرباعي.



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

صيغة الميل

$$m = \frac{3 - (-1)}{1 - 2} = -4$$

ميل \overline{AB} :

$$m = \frac{1 - 5}{7 - 6} = -4$$

ميل \overline{CD} :

$$m = \frac{5 - 3}{6 - 1} = \frac{2}{5}$$

ميل \overline{BC} :

$$m = \frac{-1 - 1}{2 - 7} = \frac{2}{5}$$

ميل \overline{DA} :

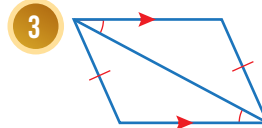
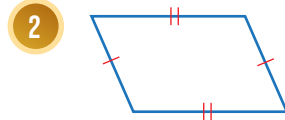
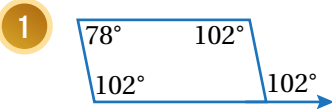
بما أن الضلعين المتقابلين \overline{AB} و \overline{CD} لهما الميل نفسه، إذن فهما متوازيان، وبما أن الضلعين المتقابلين \overline{BC} و \overline{DA} لهما الميل نفسه، إذن فهما متوازيان، وبما أن الأضلاع المتقابلة متوازية، إذن فالشكل الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.

أتحقق من فهمي:



أثبت أن $A(-3, 3)$, $B(2, 5)$, $C(5, 2)$, $D(0, 0)$ تمثل رؤوس متوازي أضلاع.

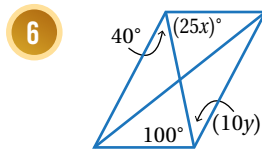
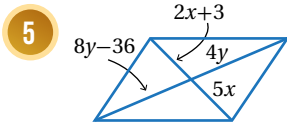
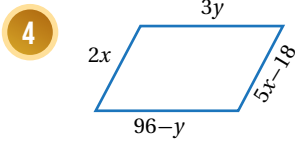
أبين ما إذا كان كل شكل من الأشكال الرباعية الآتية متوازي أضلاع أم لا، مبرراً إجابتي:



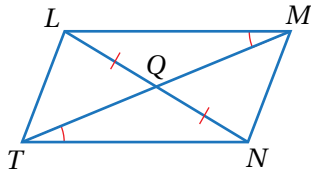
أدرب وأحل المسائل

الوحدة 7

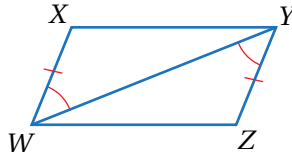
أجد قيمتي x و y اللتين تجعلان كل شكل رباعي مما يأتي متوازي أضلاع:



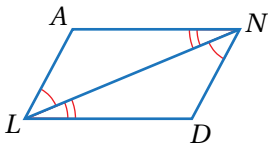
أستعمل المعلومات المعطاة في الشكل الآتي لكتابة برهان سهمي؛ لأثبت أن الشكل الرباعي $LMNT$ متوازي أضلاع.



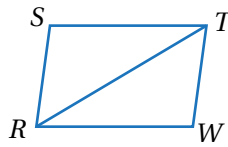
أستعمل المعلومات المعطاة في الشكل الآتي لكتابة برهان سهمي؛ لأثبت أن الشكل الرباعي $XYZW$ متوازي أضلاع.



أستعمل المعلومات المعطاة في الشكل الآتي لكتابة برهان ذي عمودين؛ لأثبت أن الشكل الرباعي $ANDL$ متوازي أضلاع.

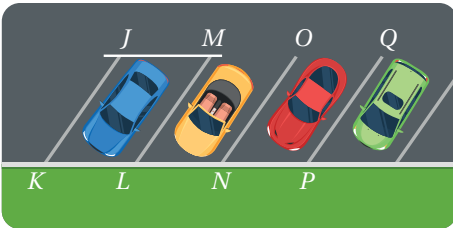


في الشكل الآتي، إذا كان $\triangle TRS \cong \triangle RTW$ ، فأثبت أن $RSTW$ متوازي أضلاع باستعمال البرهان ذي العمودين.



معلومة

يُعدُّ اصطفاؤُ السَّيَّاراتِ بطريقةٍ منتظمةٍ مِنَ المظاهر الحضارية التي تعطي انطباعاً إيجابياً حول ثقافة المجتمع.



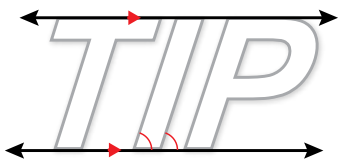
موقف سيارات: يبين الشكل المجاور موقفاً للسيارات. إذا كان $JK = LM = 7 \text{ m}$ و $m\angle JKL = 60^\circ$

و $KL = JM = 3 \text{ m}$

هل الجزء من الموقف $JKLM$ متوازي أضلاع؟ أبرر إجابتي.

أجد كلاً من: $m\angle JML$, $m\angle KJM$, $m\angle KLM$

هل $\overline{JK} \parallel \overline{PQ}$ ؟ أبرر إجابتي.



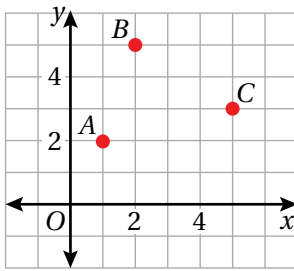
حاسوب: تسمح معالجات نصوص حاسوبية عدة بكتابة الكلمة بالخط العادي أو الخط المائل. هل حرف (I) متوازي أضلاع؟ أبرر إجابتي.

14

أمثل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه في ما يأتي، وأحدد ما إذا كان متوازي أضلاع أم لا، مبرراً إجابتي:

15 $B(-6, -3), C(2, -3), E(4, 4), G(-4, 4)$

16 $Q(-3, -6), R(2, 2), S(-1, 6), T(-5, 2)$

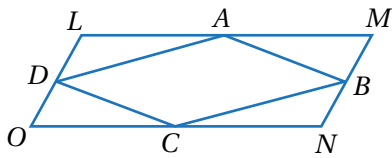
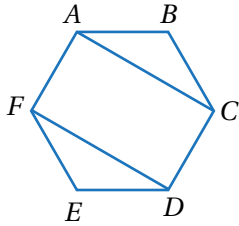


تبرير: تمثل النقاط A, B, C في المستوى الإحداثي المجاور رؤوس شكل رباعي، أجد إحداثيات النقطة الرابعة في كل من الحالات الآتية، مبرراً إجابتي:

النقطة D حيث $ABCD$ متوازي أضلاع.

النقطة E حيث $ABEC$ متوازي أضلاع.

تبرير: أثبت أن الشكل الرباعي $FACD$ متوازي أضلاع، علماً بأن $ABCDEF$ سداسي منتظم. أبرر إجابتي.



تحذ: يبين الشكل المجاور متوازي الأضلاع $LMNO$ ، وتمثل النقاط A, B, C, D منتصفات أضلاعه. أثبت أن الشكل $ABCD$ متوازي أضلاع.

أكتب: كيف يمكن إثبات أن شكلاً رباعياً يمثل متوازي أضلاع؟

مهارات التفكير العليا

إرشاد

أبدأ بإثبات أن

$$\triangle ABC \cong \triangle FED$$

17

18

19

20

21

أستكشف



تتكوّن الرقعة الخاصة بلعبة الشطرنج من 64 مربعًا ملوّنًا. كيف يمكنني إثبات أن الرقعة نفسها مربعة؟

فكرة الدرس

- أحدّد خصائص كلٍّ من: المستطيل، والمعين، والمربع.
- أحدّد ما إذا كان متوازي الأضلاع مستطيلًا أو معينًا أو مربعًا.

المصطلحات

المستطيل، المعين، المربع

تعرفت سابقًا خصائص متوازي الأضلاع المتعلقة بأضلاعه وزواياه وأقطاره، وسأتعرف في هذا الدرس ثلاثة أنواع خاصة من متوازي الأضلاع وهي: المستطيل، والمعين، والمربع.

المستطيل

المستطيل (rectangle) هو متوازي أضلاع زواياه الأربع قوائم، وهذا يعني أن له الخصائص الآتية:

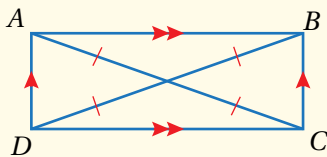


- زواياه الأربع قوائم.
- الأضلاع المتقابلة متوازية ومتطابقة.
- الزوايا المتقابلة متطابقة.
- الزوايا المتحالفة متكاملة.
- قطراه ينصف كل منهما الآخر.

وتُضاف إلى الخصائص السابقة خاصية أخرى متعلقة بقطري المستطيل موضحة في النظرية الآتية:

قطر المستطيل

نظرية



نظرية قطري المستطيل

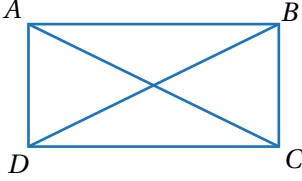
يكون متوازي الأضلاع مستطيلًا إذا وفقط إذا كان قطراه متطابقين.

مثال: يكون $ABCD$ مستطيلًا إذا وفقط إذا كان $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

أداة الربط "إذا وفقط إذا" التي وردت في نظرية قُطري المستطيل تعني أن كلاً من العبارة الشرطية وعكسها صحيحتان؛ لذا، إذا كان قُطرا متوازي الأضلاع متطابقين فإنه مستطيل، وإذا كان متوازي الأضلاع مستطيلاً فإن قُطريه متطابقان.



مثال 1: إثبات نظرية



يبين الشكل المجاور المستطيل $ABCD$ ، أثبت أن قُطري المستطيل $ABCD$ متطابقان، باستعمال البرهان ذي العمودين.

أخطّط للبرهان باتّباع الخطوات الآتية:

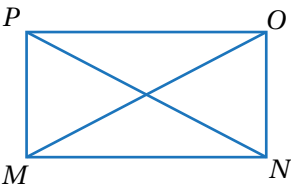
الخطوة 1 أستعمل حالة تطابق مثلثين بضلعين وزاوية محصورة (SAS)؛ لأثبت أن $\triangle ADC \cong \triangle BCD$

الخطوة 2 أستعمل تطابق المثلثين؛ لأثبت أن $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

البرهان:

المبررات	العبارات
(1) ضلعان متقابلان في مستطيل.	(1) $\overline{AD} \cong \overline{BC}$
(2) ضلع مشترك.	(2) \overline{DC}
(3) زوايا المستطيل قوائم.	(3) $\angle D \cong \angle C$
(4) SAS	(4) $\triangle ADC \cong \triangle BCD$
(5) ضلعان متناظران في مثلثين متطابقين.	(5) $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

أتحقق من فهمي:

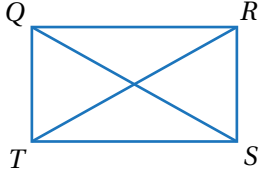


يبين الشكل المجاور $\square PONM$ ، إذا كان $\overline{PN} \cong \overline{OM}$ ، فأثبت باستعمال البرهان ذي العمودين أن $PONM$ مستطيل.

الوحدة 7

يمكن استعمال خصائص المستطيل لإيجاد قيم مجهولة.

مثال 2



إذا كان $QRST$ مستطيلاً، وكان $QS = 6x + 14$ و $RT = 9x + 5$ ، فأجد قيمة المتغير x .

بما أن $QRST$ مستطيل، فإن قطريه متطابقان، إذن أجد قيمة x التي تجعل $\overline{QS} \cong \overline{RT}$

$$QS = RT$$

$$9x + 5 = 6x + 14$$

$$3x + 5 = 14$$

$$3x = 9$$

$$x = 3$$

قطر المستطيل متساويان في الطول

أعوّض

أطرح $6x$ من طرفي المعادلة

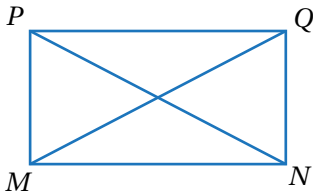
أطرح 5 من طرفي المعادلة

أقسم طرفي المعادلة على 3

أتحقق من فهمي:



إذا كان $PQMN$ مستطيلاً، وكان $MQ = 2x + 11$ و $PN = 5x - 31$ ، فأجد قيمة المتغير x .

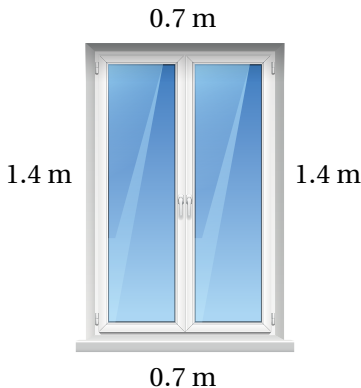


يمكن استعمال خصائص المستطيل لتوضيح علاقات من واقع الحياة.

مثال 3: من الحياة



نافذة: يبين الشكل المجاور إطار نافذة أبعادها موضحة في الشكل.



1 هل إطار النافذة على شكل مستطيل؟ أبرر إجابتي.

يظهر من الشكل أن أضلاع الإطار المتقابلة لها الطول نفسه؛ لذا فالإطار على شكل متوازي أضلاع، ولكن لا يوجد ما يدل على أن الزوايا قوائم؛ لذا لا يمكن تحديد ما إذا كان الإطار على شكل مستطيل أم لا.

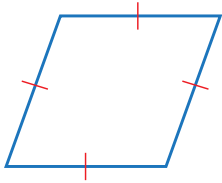
2 قاس تميم طولَي قُطْرَي الإطار، فوجد أن طول أحدهما 2.45 m وطول الآخر 2.40 m ، فهل إطار النافذة على شكل مستطيل؟ أبرر إجابتي.

بالرجوع إلى نظرية قُطْرَي المستطيل، فإن الشكل الرباعي يكون مستطيلاً إذا كان قُطْرَاهُ متطابقين، وبما أن قُطْرَي إطار النافذة ليسا متطابقين؛ إذن فإطار النافذة ليس على شكل مستطيل.

✓ **أتحقق من فهمي:**

3 افترض أن قُطْرَي النافذة لهما الطول نفسه، فهل إطارها على شكل مستطيل؟ أبرر إجابتي.

المعين



المعين (rhombus) هو متوازي أضلاع أضلاعه جميعها متطابقة.

للمعين خصائص متوازي الأضلاع جميعها، إضافة إلى الخاصيتين الموضحتين في النظريتين الآتيتين:

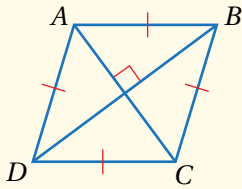
المعين

نظريات

• **نظرية قُطْرَي المعين**

يكون متوازي الأضلاع معيناً إذا وفقط إذا كان قُطْرَاهُ متعامدين.

مثال: يكون $ABCD$ معيناً إذا وفقط إذا كان $AC \perp BD$

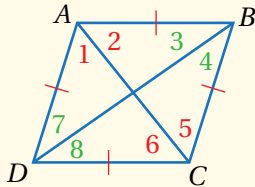


• **نظرية الزوايا المتقابلة في المعين**

يكون متوازي الأضلاع معيناً إذا وفقط إذا نصف كل قُطْرٍ من قُطْرَيْهِ الزاويتين المتقابلتين اللتين يصل بين رأسيهما.

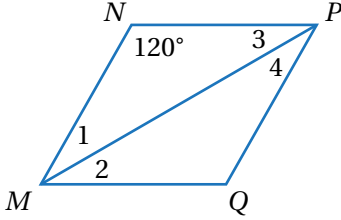
مثال: يكون $ABCD$ معيناً إذا وفقط إذا نصف AC كلاً من $\angle A$ و $\angle C$ ، ونصف BD كلاً من $\angle B$ و $\angle D$ ، وهذا يعني أن:

$$\angle 1 \cong \angle 2, \angle 3 \cong \angle 4, \angle 5 \cong \angle 6, \angle 7 \cong \angle 8$$



يمكن استعمال خصائص المعين لإيجاد قيم مجهولة.

مثال 4



يبيّن الشكل المجاور المعين $NPQM$. إذا كانت $m\angle N = 120^\circ$ ، فأجد قياسات الزوايا المرقمة في الشكل.

$$m\angle 1 = m\angle 3$$

نظرية المثلث المتطابق الضلعين

$$m\angle 1 + m\angle 3 + 120^\circ = 180^\circ$$

مجموع زوايا المثلث

$$2(m\angle 1) + 120^\circ = 180^\circ$$

أعوّض

$$2(m\angle 1) = 60^\circ$$

أطرح 120 من طرفي المعادلة

$$m\angle 1 = 30^\circ$$

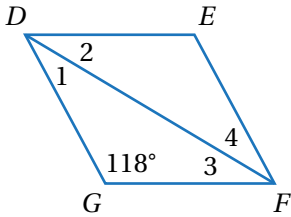
أقسم طرفي المعادلة على 2

ومنه فإن $m\angle 1 = m\angle 3 = 30^\circ$.

وبحسب نظرية الزوايا المتقابلة في المعين فإن $m\angle 1 = m\angle 2$ و $m\angle 3 = m\angle 4$ ، وهذا يعني أن:

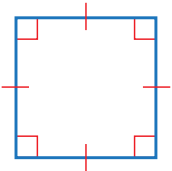
$$m\angle 1 = m\angle 2 = m\angle 3 = m\angle 4 = 30^\circ$$

أتحقق من فهمي:



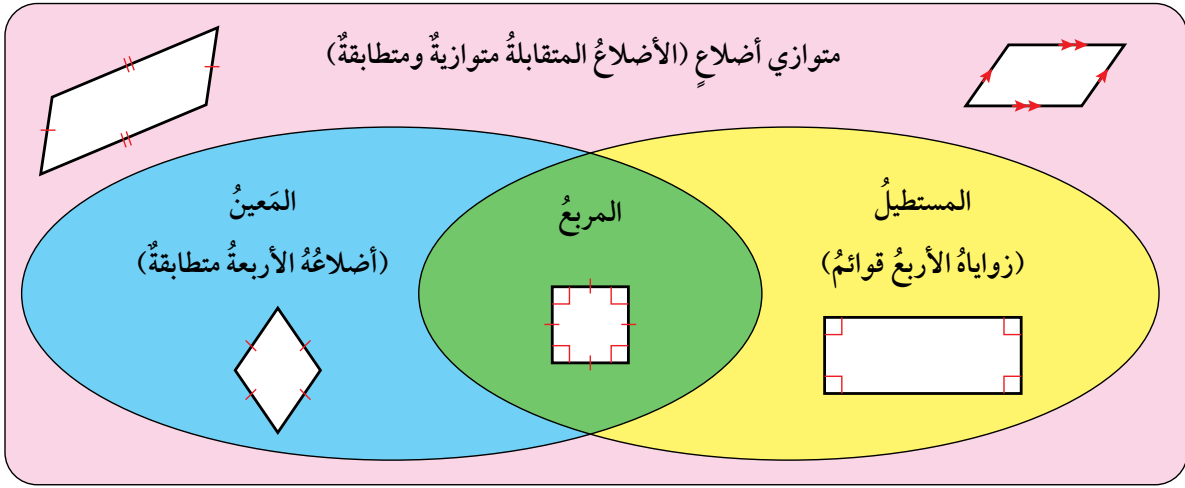
يبيّن الشكل المجاور المعين $DEFG$. إذا كانت $m\angle G = 118^\circ$ ، فأجد قياسات الزوايا المرقمة في الشكل.

المربع



المربع (square) هو متوازي أضلاع أضلاعه جميعها متطابقة، وزواياه الأربع قوائم. وبما أن المستطيل متوازي أضلاع زواياه الأربع قوائم، والمعين متوازي أضلاع أضلاعه الأربعة متطابقة، فإن المربع مستطيل؛ لأن زواياه الأربع قوائم، وهو أيضاً معين؛ لأن أضلاعه الأربعة متطابقة، وهذا يعني أن جميع خصائص متوازي الأضلاع، والمستطيل، والمعين تنطبق على المربع.

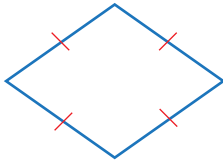
ويوضح شكلُ فن الآتي العلاقة بين متوازي الأضلاع، والمعين، والمستطيل، والمربع.



مثال 5

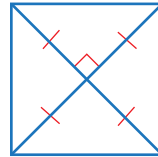
أحدّد ما إذا كان متوازي الأضلاع في كلّ ممّا يأتي مستطيلاً أمّ معيناً أمّ مربعاً، مبرّراً إجابتني:

1



بما أنّ الأضلاع الأربعة لمتوازي الأضلاع المبيّن في الشكل متطابقة، فإنّه يمثل معيناً.

2



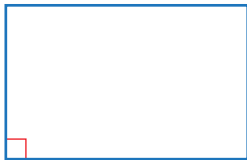
بما أنّ قُطريّ متوازي الأضلاع المبيّن في الشكل متطابقان، فإنّ متوازي الأضلاع مستطيل، وبما أنّ القُطرين متعامدان، فإنّ متوازي الأضلاع معين أيضاً، ومنه فإنّ متوازي الأضلاع المبيّن في الشكل مربع.

أتحقّق من فهمي:

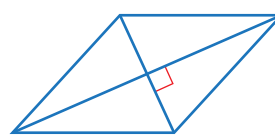


أحدّد ما إذا كان متوازي الأضلاع في كلّ ممّا يأتي مستطيلاً أمّ معيناً أمّ مربعاً، مبرّراً إجابتني:

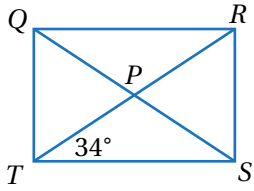
3



4

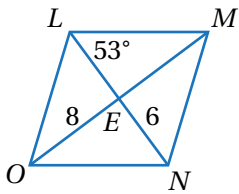


الوحدة 7



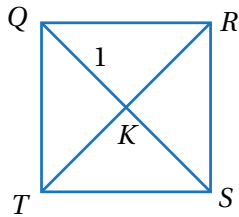
يبيّن الشكل المجاور المستطيل $QRST$. إذا كان قُطره يتقاطعان في النقطة P و $m\angle PTS = 34^\circ$ و $QS = 10$ ، فأجد كلاً ممّا يأتي:

- | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| 1 $m\angle QTR$ | 2 $m\angle QRT$ | 3 $m\angle SRT$ |
| 4 QP | 5 RT | 6 RP |



يبيّن الشكل المجاور المَعِين $LMNO$. إذا كان قُطره يتقاطعان في النقطة E و $m\angle NLM = 53^\circ$ و $OE = 8$ و $NE = 6$ ، فأجد كلاً ممّا يأتي:

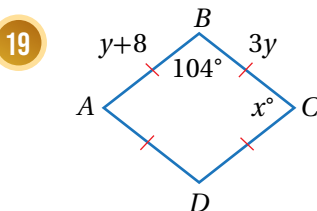
- | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| 7 $m\angle OLN$ | 8 $m\angle LEO$ | 9 $m\angle LON$ |
| 10 OM | 11 LE | 12 LN |



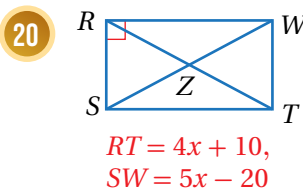
يبيّن الشكل المجاور المربع $QRST$. إذا كان قُطره يتقاطعان في النقطة K و $QK = 1$ ، فأجد كلاً ممّا يأتي:

- | | | |
|------------------|------------------|------------------|
| 13 $m\angle RKS$ | 14 $m\angle QTK$ | 15 $m\angle QRK$ |
| 16 KS | 17 QS | 18 RT |

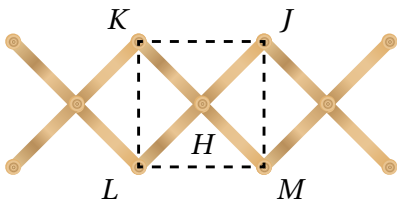
أحدّد ما إذا كان متوازي الأضلاع في كلّ ممّا يأتي مستطيلاً أمّ معيناً أمّ مربعاً، مبرراً إجابتي، ثمّ أجد قيمة كلّ من x و y :



19



20



علاقة ملابس: يبين الشكل المجاور علاقة ملابس خشبية. إذا كان $KJML$ متوازي أضلاع، وكان $\overline{KM} \perp \overline{LJ}$ ، و $m\angle K = 90^\circ$ ، فأجيب عن كل مما يأتي:

21 هل متوازي الأضلاع $KJML$ مستطيل أم معين أم مربع؟ أبرر إجابتي.

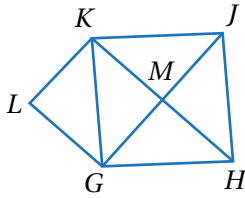
22 إذا كان $KJ = 20$ cm، فأجد KM و JL ، مبرراً إجابتي.

إرشاد

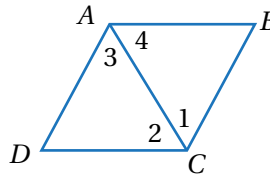
أبدأ بإثبات أن

$$\triangle ABC \cong \triangle CDA$$

24 في الشكل الآتي، إذا كان $GHJK$ متوازي أضلاع، وكان $\triangle LGK \cong \triangle MJK$ ، فأثبت أن $GHJK$ معين، باستعمال البرهان السهمي.

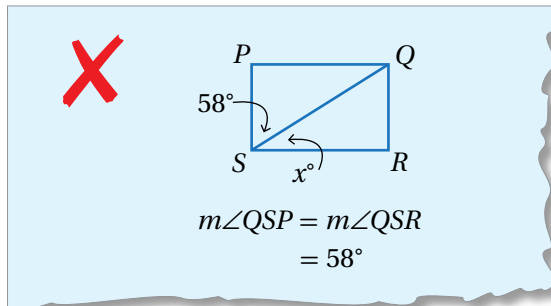


23 في الشكل الآتي، إذا كان $ADCB$ متوازي أضلاع، وكان \overline{AC} ينصف $\angle A$ و $\angle C$ ، فأثبت أن $ABCD$ معين، باستعمال البرهان ذي العمودين.



مهارات التفكير العليا

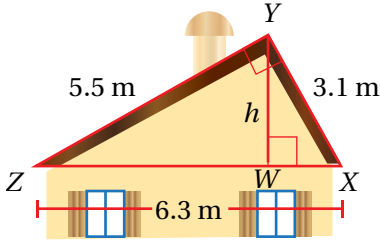
25 **أكتشف الخطأ:** أنظر الحل الآتي، واكتشف الخطأ الوارد فيه، وأصححه، علماً بأن $PQRS$ مستطيل.



26 **تبرير:** هل المعينات جميعها متشابهة؟ أبرر إجابتي.

27 **اكتب:** كيف أميز ما إذا كان متوازي الأضلاع مستطيلاً أم معيناً أم مربعاً؟

أستكشف



بيِّن الشكل المجاور الواجهة الأمامية لسطح منزل، كيف يمكنني معرفة الارتفاع (h) ؟

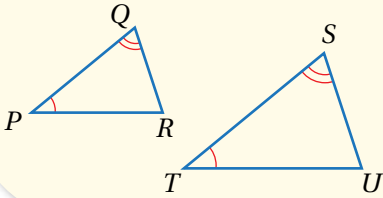
فكرة الدرس

أحد المثلثات المتشابهة،
باستعمال حالات التشابه AA
و SSS و SAS

تعلمت سابقاً أن المضلعات المتشابهة هي مضلعات زواياها المتناظرة متطابقة، وأطوال أضلاعها المتناظرة متناسبة، وتعد المثلثات حالة خاصة من المضلعات. وتوجد مسلمت ونظريات لإثبات تشابه المثلثات.

التشابه بزائيتين (AA)

مسلمة



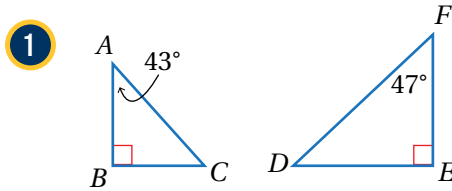
إذا طابقت زائيتان في مثلث زائيتين في مثلث آخر، فإن المثلثين متشابهان.

مثال: إذا كانت $\angle P \cong \angle T$ و $\angle Q \cong \angle S$ فإن $\triangle PQR \sim \triangle TSU$

يمكن استعمال مسلمة (AA) لتحديد ما إذا كان مثلثان متشابهين أم لا.

مثال 1

أحد ما إذا كان كل مثلثين مما يأتي متشابهين أم لا، وإذا كانا كذلك، فأكتب عبارة التشابه، مبرراً إجابتي.



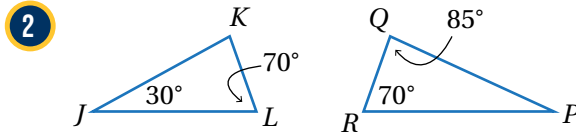
$\angle B \cong \angle E$ ؛ لأنهما زائيتان قائمتان.

باستعمال مجموع قياسات زوايا المثلث يكون:

$$m\angle C = 180^\circ - (90^\circ + 43^\circ) = 47^\circ$$

وبما أن $m\angle F = 47^\circ$ فإن $\angle C \cong \angle F$

إذن $\triangle ABC \sim \triangle DFE$ وفق المسلمة (AA).



$\angle L \cong \angle R$ ؛ لأن كلا الزائيتين قياسهما 70°

باستعمال مجموع قياسات زوايا المثلث يكون:

$$m\angle K = 180^\circ - (30^\circ + 70^\circ) = 80^\circ$$

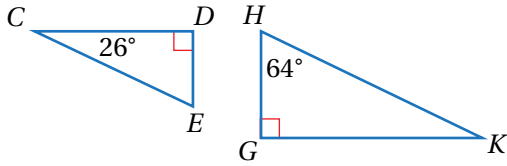
$$m\angle P = 180^\circ - (85^\circ + 70^\circ) = 25^\circ$$

وبما أنه يوجد زوج واحد فقط من الزوايا المتطابقة، إذن $\triangle JKL$ و $\triangle PQR$ ليسا متشابهين.

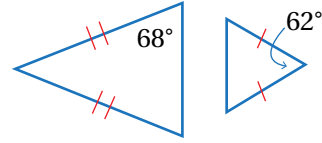
أتحقق من فهمي:



3



4



في ما يأتي طريقتان أخريان لتحديد ما إذا كان مثلثان متشابهين أم لا:

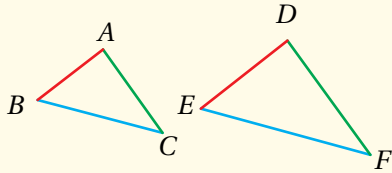
تشابه المثلثات

نظريات

التشابه بثلاثة أضلاع (SSS)

إذا كانت الأضلاع المتناظرة لمثلثين متناسبة، فإن المثلثين متشابهان.

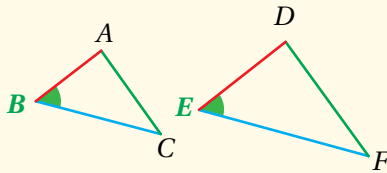
مثال: إذا كان $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$ ، فإن $\triangle ABC \sim \triangle DEF$



التشابه بضلعين وزاوية محصورة (SAS)

إذا كان طولاً ضلعين في مثلث متناسبين مع طولَي الضلعين المناظرين لهما في مثلث آخر، وكانت الزاويتان المحصورتان بينهما متطابقتين، فإن المثلثين متشابهان.

مثال: إذا كان $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ و $\angle B \cong \angle E$ فإن $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

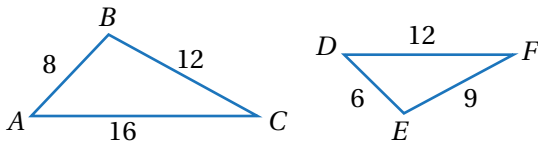


يمكن استعمال نظريتي (SSS) و (SAS) لتحديد ما إذا كان مثلثان متشابهين أم لا.

مثال 2

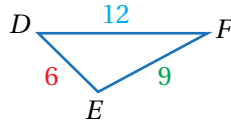
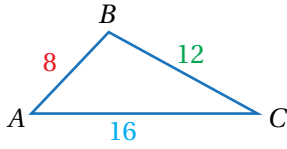
أحدد ما إذا كان كل مثلثين مما يأتي متشابهين أم لا، وإذا كانا كذلك، فأكتب عبارة التشابه، مبرراً إجابتي.

1



أستعمل أطوال الأضلاع لتمييز الأضلاع المتقابلة، ثم أجد النسبة بين طول كل زوج من أزواج الأضلاع المتقابلة في المثلثين.

الوحدة 7



أقصر ضلعين

$$\frac{AB}{DE} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

أطول ضلعين

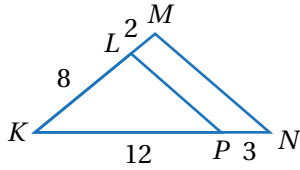
$$\frac{CA}{FD} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

الضلعان المتبقيان

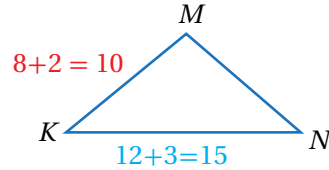
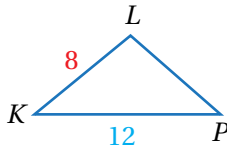
$$\frac{BC}{EF} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

بما أن النسب جميعها متساوية، إذن $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ وفق نظرية التشابه (SSS).

2



بما أن $\angle K$ مشتركة بين المثلثين، إذن أجد النسبة بين طولَي زوجي الأضلاع المتقابلة اللذين يحصران $\angle K$ في المثلثين.



أقصر ضلعين

$$\frac{KL}{KM} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

أطول ضلعين

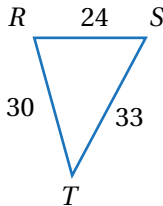
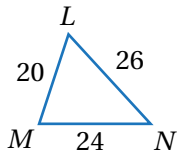
$$\frac{KP}{KN} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

بما أن طولَي الضلعين اللذين يحصران $\angle K$ في $\triangle KLP$ متناسبان مع طولَي الضلعين المناظرين لهما في $\triangle KMN$ ، إذن $\triangle KLP \sim \triangle KMN$ وفق نظرية التشابه (SAS).

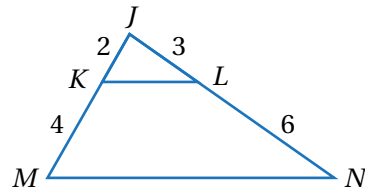
أتحقق من فهمي:



3

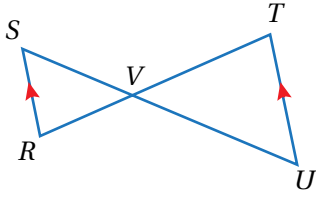


4



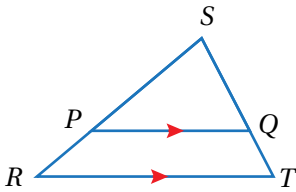
يمكنني استعمال مسلمات التشابه ونظرياتهما في إثبات تشابه مثلثين.

مثال 3



أُستعملُ المعلوماتُ المعطاةُ في الشكلِ المجاورِ، لأثبتَ أنَّ $\Delta SVR \sim \Delta UVT$ باستعمالِ البرهانِ ذي العمودينِ.

المبرراتُ	العباراتُ
(1) زاويتان متقابلتان في الرأسِ.	(1) $\angle SVR \cong \angle UVT$
(2) معطًى.	(2) $\overline{SR} \parallel \overline{UT}$
(3) زاويتان متبادلتان داخلياً.	(3) $\angle S \cong \angle U$
(4) مسلّمة التشابه (AA).	(4) $\Delta SVR \sim \Delta UVT$

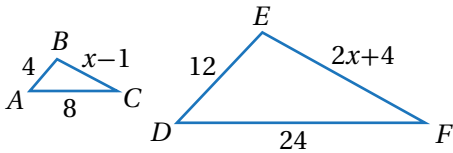


أُستعملُ المعلوماتُ المعطاةُ على الشكلِ المجاورِ، لأثبتَ أنَّ $\Delta SPQ \sim \Delta SRT$ باستعمالِ البرهانِ السهميِّ.

أتحققُ من فهمي:

يمكنني استعمالُ تشابه المثلثات في إيجاد قياسات مجهولة.

مثال 4



أجدُ قيمة x التي تجعلُ $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

الخطوة 1 أجدُ قيمة x التي تجعلُ أطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$$

$$\frac{4}{12} = \frac{x-1}{2x+4}$$

$$4(2x+4) = 12(x-1)$$

$$8x + 16 = 12x - 12$$

$$-4x + 16 = -12$$

$$-4x = -28$$

$$x = 7$$

أكتبُ التناسبَ

أعوّضُ

بالضربِ التبادليِّ

خاصية التوزيع

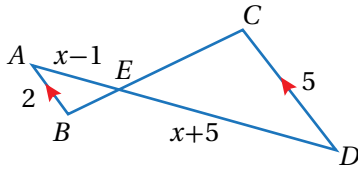
أطرحُ $12x$ من طرفي المعادلة

أطرحُ 16 من طرفي المعادلة

أقسمُ طرفي المعادلة على -4

الوحدة 7

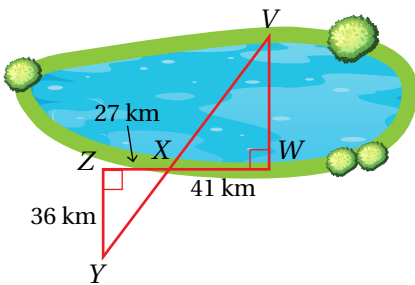
أتحقق من فهمي:



أجد قيمة x التي تجعل $\triangle ABE \sim \triangle DCE$

يمكن استعمال تشابه المثلثات في بعض التطبيقات الحياتية.

مثال 5: من الحياة



بحيرة: يريد مساح قياس عرض بحيرة باستعمال تقنية المسح المبيئة في الشكل المجاور. أجد عرض البحيرة (VW).

الخطوة 1 أثبت أن $\triangle YZX \sim \triangle VWX$

المبررات	العبارات
(1) زاويتان متقابلتان في الرأس.	$\angle ZXY \cong \angle VXC$ (1)
(2) زاويتان قائمتان.	$\angle Z \cong \angle W$ (2)
(3) مسلّمة التشابه (AA).	$\triangle YZX \sim \triangle VWX$ (3)

الخطوة 2 أجد عرض البحيرة (VW)

بما أن $\triangle YZX \sim \triangle VWX$ ، فيمكن استعمال التناسب بين أطوال الأضلاع المتناظرة لإيجاد عرض البحيرة.

أفترض أن $VW = x$

$$\frac{YZ}{VW} = \frac{ZX}{WX}$$

أكتب التناسب

$$\frac{36}{x} = \frac{27}{41}$$

أعوّض

$$27x = 1476$$

بالضرب التبادلي

$$x \approx 54.7$$

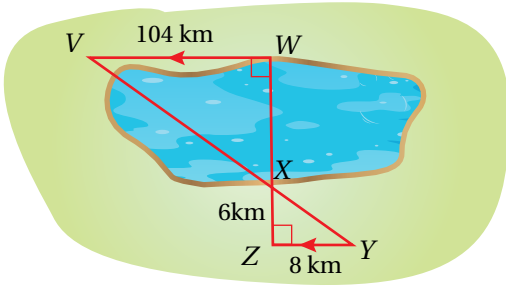
أستعمل الآلة الحاسبة

إذن، عرض البحيرة يساوي 54.7 km تقريبًا.

أتحقق من فهمي:



بيِّن الشكل المجاور طريقةً أخرى لقياس عرض البحيرات، أجدُ عرض البحيرة WX فيه.

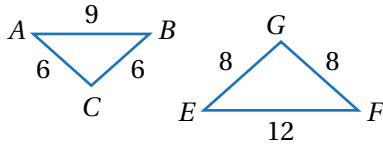


أُتدرب وأحل المسائل

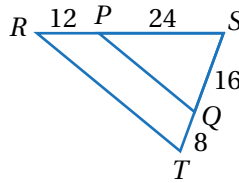


أحدِّد ما إذا كان كلُّ مثلثين ممَّا يأتي متشابهين أم لا، وإذا كانا كذلك، فأكتبُ عبارة التشابه، مبرِّراً إجابتي.

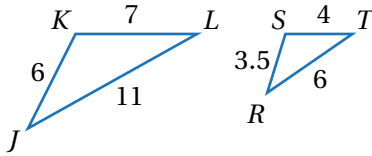
1



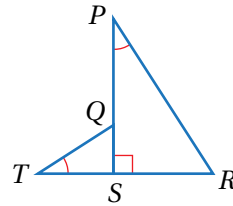
2



3



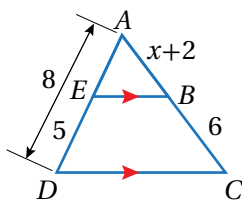
4



أثبتُ أنَّ كلَّ مثلثين ممَّا يأتي متشابهان، ثُمَّ أجدُ الطول المطلوب:

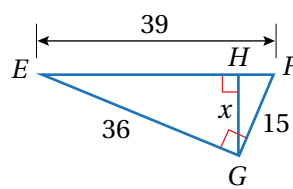
5

AB



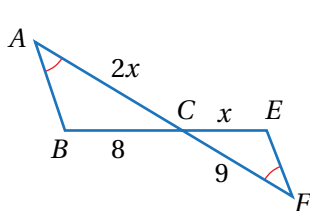
6

HG



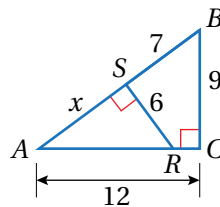
7

AC

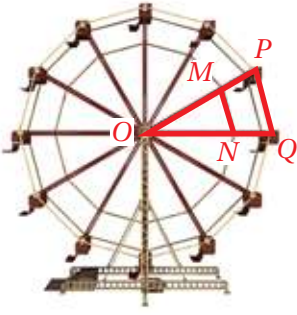


8

AB

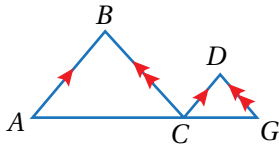


الوحدة 7

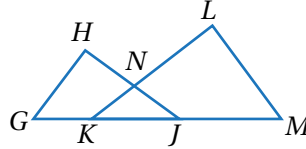


عجلة دوّارة: بيّن الشكل المجاور عجلة دوّارة، فإذا علمت أن $MP = NQ = 1.5 \text{ m}$ ، وأن $OM = ON = 3$ ، فأبيّن ما إذا كان $\triangle OPQ \sim \triangle OMN$ أم لا.

أستعمل المعلومات المعطاة على الشكل الآتي لأثبت أن $AB \times CG = CD \times AC$ باستعمال البرهان السهمي.

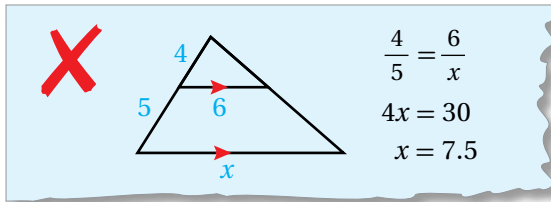


في الشكل الآتي، إذا كان $\triangle KNJ$ متطابق الضلعين و $\angle N$ زاوية رأسه، وكان $\angle L \cong \angle H$ ، فأثبت أن $\triangle GHJ \sim \triangle MLK$ باستعمال البرهان ذي العمودين.

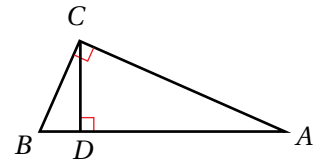


أعود إلى فقرة (أستكشف) بداية الدرس، وأحل المسألة.

أكتشف الخطأ: أنظر الحل الآتي، وأكتشف الخطأ في إيجاد قيمة x ، وأصحّحه.



تحدّد: أحدّد في الشكل المجاور ثلاثة مثلثات متشابهة، ثم أكتب ثلاث جمل تشابه بين المثلثات، وأثبتها جميعها.



تبرير: هل المستقيم الذي يقطع ضلعي مثلث، ويكون موازياً للضلع الثالث من المثلث، يشكّل مثلثين متشابهين؟ أبرّر إجابتي.

أكتب: كيف أحدّد ما إذا كان مثلثان متشابهين أم لا؟

إرشاد

يمكنني إعادة رسم الشكل وفصل المثلثات المتداخلة؛ لتسهيل الإثبات.

مهارات التفكير العليا

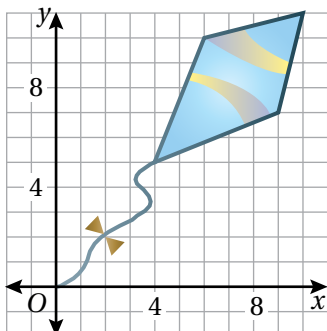
فكرة الدرس

أرسم صورة لمضلع ناتجة عن تمدد في المستوى الإحداثي.

المصطلحات

التمدّد، مركز التمدّد، معامل التمدّد، التكبير، التصغير.

أستكشف

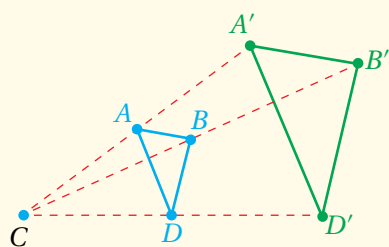


صممت رزان الطائرة الورقية المجاورة على المستوى الإحداثي، وتريد إعادة رسم هذه الطائرة تحت تأثير تكبير مركزه نقطة الأصل ومعامله 2.5 ما إحداثيات الطائرة بعد التكبير؟

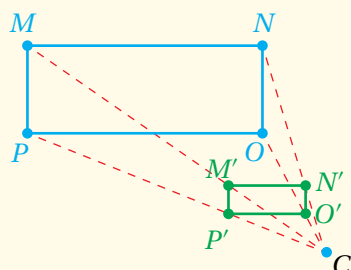
التمدّد (dilation) هو تحويل هندسي يكبر الشكل أو يصغره من نقطة ثابتة C تُسمى **مركز التمدّد (center of dilation)** ونسبة محددة تُسمى **معامل التمدّد (scale factor of dilation)** وقيمته k ، وهو نسبة أحد أطوال الصورة إلى الطول المناظر له في الشكل الأصلي.

التمدّد

مفهوم أساسي



- إذا كان التمدّد الذي مركزه C ومعامله هو العدد الموجب k حيث $k \neq 1$ و $k > 1$ فإن التمدّد **تكبير** (enlargement).



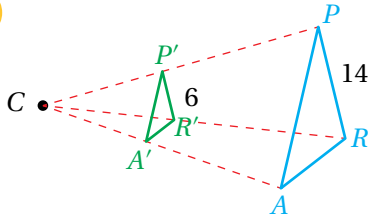
- إذا كان التمدّد الذي مركزه C ومعامله هو العدد الموجب k حيث $k \neq 1$ و $0 < k < 1$ فإن التمدّد **تصغير** (reduction).

الوحدة 7

مثال 1

أجد معامل التمدد في كل مما يأتي، ثم أحدد ما إذا كان التمدد كبيراً أم تصغيراً:

1

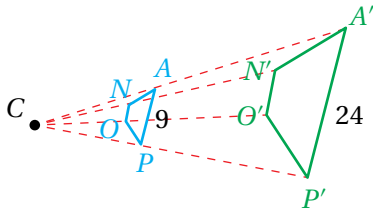


لإيجاد معامل التمدد أجد نسبة طول أحد أطوال الصورة إلى الطول المناظر له في الشكل الأصلي.

$$\frac{P'R'}{PR} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$$

إذن، معامل التمدد $k = \frac{3}{7}$ ، وبما أن $0 < k < 1$ فإن التمدد يُعدُّ تصغيراً.

2



لإيجاد معامل التمدد أجد نسبة طول أحد أطوال الصورة إلى الطول المناظر له في الشكل الأصلي.

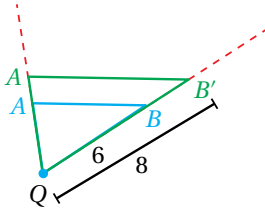
$$\frac{A'P'}{AP} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$$

إذن، معامل التمدد $k = \frac{8}{3}$ ، وبما أن $k > 1$ فإن التمدد يُعدُّ تكبيراً.

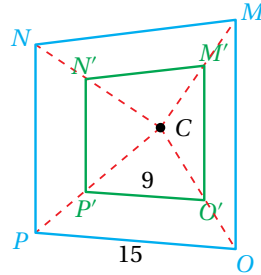
أتحقق من فهمي:



3



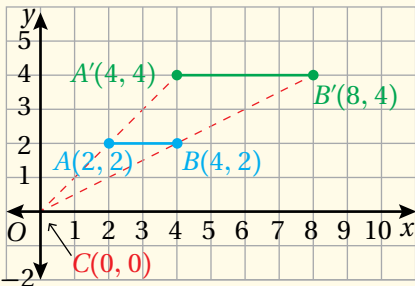
4



يمكن إيجاد صورة النقطة $P(x, y)$ في المستوى الإحداثي الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله k بضرب إحداثيي النقطة P بمعامل التمدد k .

التمدّد في المستوى الإحداثي ومركزه نقطة الأصل

مفهوم أساسي



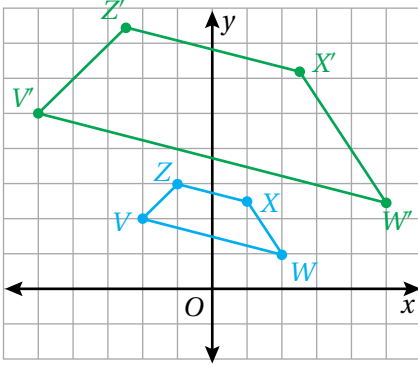
• **بالكلمات:** لإيجاد إحداثيات الصورة الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل، أضرب الإحداثيين x و y لكل نقطة في الشكل الأصلي في معامل التمدد k .

• **بالرموز:** $(x, y) \rightarrow (kx, ky)$

مثال 2

1 إحداثيات رؤوس الشكل الرباعي $VZXW$ هي: $V(-2, 2)$, $Z(-1, 3)$, $X(1, 2.5)$, $W(2, 1)$. أمثل بيانياً $VZXW$ وصورتَه الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل، ومعامله 2.5

الخطوة 1 أضرب الإحداثيين x و y لكل رأس في معامل التمدد 2.5

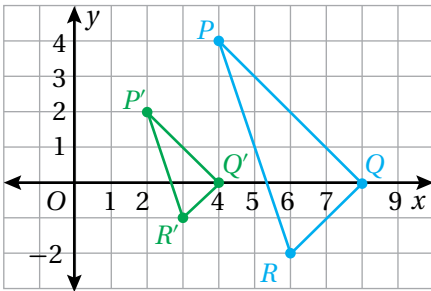


الشكل الأصلي	→	الصورة
(x, y)	→	$(2.5x, 2.5y)$
$V(-2, 2)$	→	$V'(-5, 5)$
$Z(-1, 3)$	→	$Z'(-2.5, 7.5)$
$X(1, 2.5)$	→	$X'(2.5, 6.25)$
$W(2, 1)$	→	$W'(5, 2.5)$

الخطوة 2 أمثل بيانياً $VZXW$ وصورتَه $V'Z'X'W'$

2 إحداثيات رؤوس $\triangle PQR$ هي: $P(4, 4)$, $Q(8, 0)$, $R(6, -2)$. أمثل بيانياً $\triangle PQR$ وصورتَه الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل، ومعامله $\frac{1}{2}$

الخطوة 1 أضرب الإحداثيين x و y لكل رأس في معامل التمدد $\frac{1}{2}$



الشكل الأصلي	→	الصورة
(x, y)	→	$(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y)$
$P(4, 4)$	→	$P'(2, 2)$
$Q(8, 0)$	→	$Q'(4, 0)$
$R(6, -2)$	→	$R'(3, -1)$

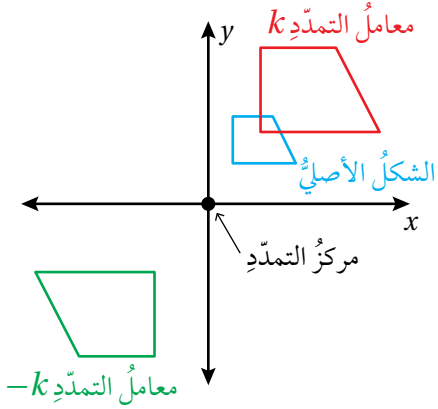
الخطوة 2 أمثل بيانياً $\triangle PQR$ وصورتَه $\triangle P'Q'R'$

✓ **أتحقق من فهمي:**

3 إحداثيات رؤوس $\triangle ABC$ هي: $A(2, 1)$, $B(4, 1)$, $C(4, -1)$. أمثل بيانياً $\triangle ABC$ وصورتَه الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل، ومعامله 1.5

4 إحداثيات رؤوس الشكل الرباعي $KLMN$ هي: $K(-3, 6)$, $L(0, 6)$, $M(3, 3)$, $N(-3, -3)$. أمثل بيانياً $KLMN$ وصورتَه الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل، ومعامله $\frac{1}{3}$

الوحدة 7



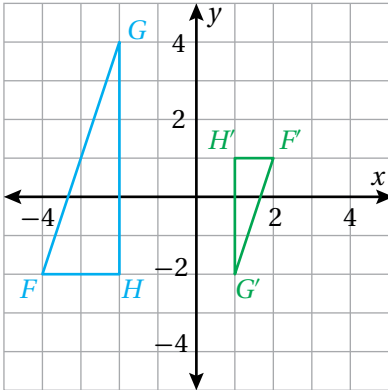
تعلمت في المثال السابق كيف أجد صورة شكل في المستوى الإحداثي تحت تأثير تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله موجب ($k > 0$)، ويمكن أيضًا إيجاد صورة شكل في المستوى الإحداثي تحت تأثير تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله سالب ($k < 0$) باستعمال القاعدة نفسها.

إن تمدد الشكل في المستوى الإحداثي تحت تأثير معامل تمدد قيمته $(-k)$ حيث k عدد موجب ومركزه نقطة الأصل، هو نفسه تمدد الشكل تحت تأثير تمدد معامل k متبوعًا بدوران مقدار 180°

مثال 3

إحداثيات رؤوس $\triangle FGH$ هي: $F(-4, -2)$, $G(-2, 4)$, $H(-2, -2)$. أمثل بيانيًا $\triangle FGH$ وصورته الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل، ومعامله $-\frac{1}{2}$

الخطوة 1 أضرب الإحداثيين x و y لكل رأس في معامل التمدد $-\frac{1}{2}$



الشكل الأصلي	الصورة
(x, y)	$\rightarrow (-\frac{1}{2}x, -\frac{1}{2}y)$
$F(-4, -2)$	$\rightarrow F'(2, 1)$
$G(-2, 4)$	$\rightarrow G'(1, -2)$
$H(-2, -2)$	$\rightarrow H'(1, 1)$

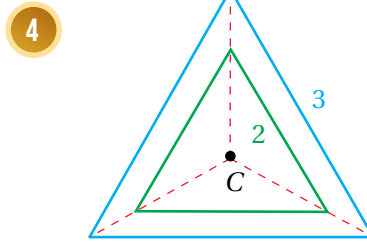
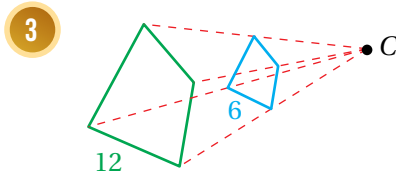
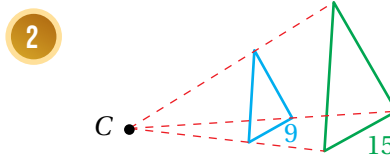
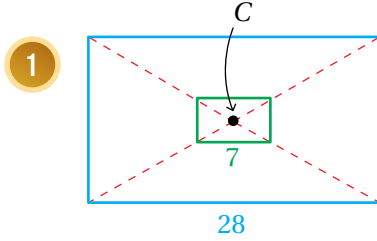
الخطوة 2 أمثل بيانيًا $\triangle FGH$ وصورته $\triangle F'G'H'$

أتحقق من فهمي:

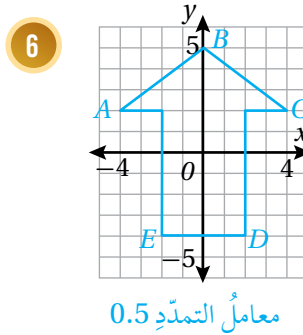
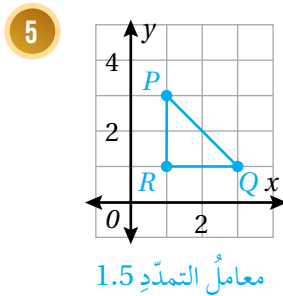


إحداثيات رؤوس $\triangle PQR$ هي: $P(1, 2)$, $Q(3, 1)$, $R(1, -3)$. أمثل بيانيًا $\triangle PQR$ وصورته الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل، ومعامله -2

إذا كان الشكل باللون الأخضر صورةً للشكل باللون الأزرق تحت تأثير تمدد مركزه C ، فأجد معامل التمدد في كل مما يأتي، ثم أحدد ما إذا كان التمدد كبيراً أم تصغيراً، وأجد قيمة المتغير:



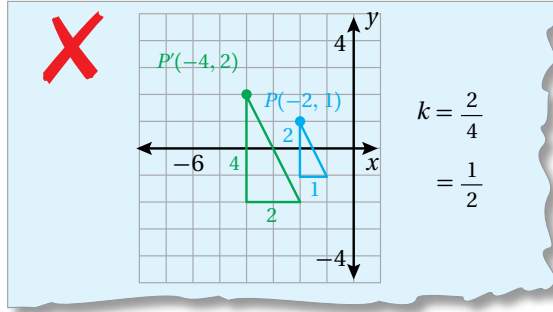
أنسخ كل مضلع مما يأتي على ورقة مربعات، ثم أرسم صورة له تحت تأثير تمدد مركزه نقطة الأصل، مستعملًا معامل التمدد المعطى أسفله:



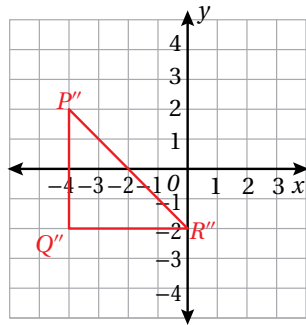
أمثل المضلع المعطاة إحداثيات رؤوسه بيانياً، ثم أمثل صورته الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله العدد k المحدد في كل من المسائل الآتية:

- 7 $B(-5, -10), C(-10, 15), D(0, 5); k = \frac{1}{5}$
- 8 $L(0, 0), M(-4, 1), N(-3, -6); k = -4$
- 9 $W(8, -2), X(6, 0), Y(-6, 4), Z(-2, 2); k = -\frac{1}{2}$
- 10 $X(-1, 2), Y(2, 1), Z(-1, -3); k = \frac{7}{2}$

أكتشف الخطأ: في الحل الآتي، أوجد سميتر معامل التمدد الذي يجعل المثلث الأخضر صورة للمثلث الأزرق تحت تأثير تمدد مركزه نقطة الأصل. أكتشف الخطأ في حله، وأصححه.



تحذير: المثلث المبين في الشكل الآتي هو صورة لمثلث تحت تأثير تحويلين هندسيين: تمدد معاملته 2 ومركزه نقطة الأصل، ثم انعكاس حول المحور y . أجد إحداثيات رؤوس المثلث الأصلي، مبررًا خطوات الحل.



مسألة مفتوحة: أرسم مضلعًا في المستوى الإحداثي، ثم أرسم تكبيرًا وتصغيرًا باختيار معامل ومركز تمدد مناسبين.

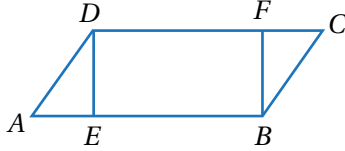
أكتب: كيف أجد صورة لمضلع في المستوى الإحداثي تحت تأثير تمدد مركزه نقطة الأصل ومعاملته k ؟

إرشاد

لإيجاد إحداثيات الشكل الأصلي، أجز الانعكاس أولاً حول المحور y ، ثم التمدد.

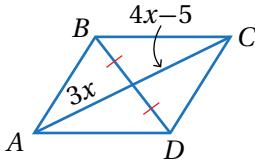
اختبار الوحدة

5 في الشكل الآتي، إذا كان $DFBE$ متوازي أضلاع، وكان $AE = CF$ ، فأثبت أن $ADCB$ متوازي أضلاع باستعمال البرهان ذي العمودين.

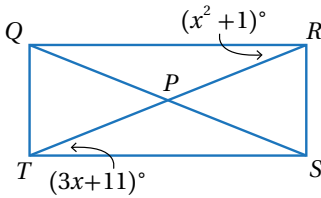
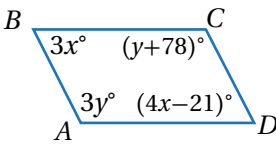


أجد قيمتي x و y اللتين تجعلان كل شكل رباعي مما يأتي متوازي أضلاع:

6

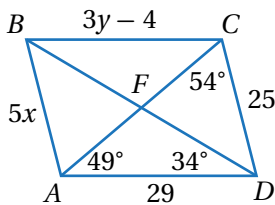


7



8 x

9 $m\angle RPS$



10 $m\angle AFD$

11 $m\angle BCF$

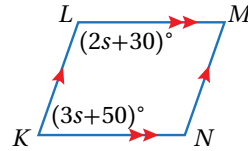
12 y

13 x

أستعمل $\square ABCD$ المجاور لأجد كلاً مما يأتي:

أختار رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

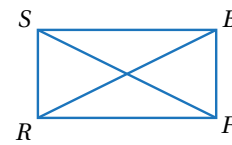
1 في $\square LMNK$ المجاور، ما قيمة s ؟



- a) 5 b) 20
c) 40 d) 70

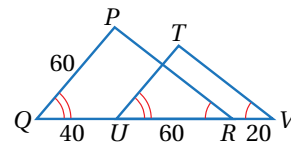
2 تمثل النقاط $(-2, 2)$, $(1, -6)$, $(8, 2)$ رؤوس متوازي أضلاع. أي النقاط الآتية تمثل الرأس الرابع للمتوازي؟

- a) (5, 6) b) (14, 3)
c) (11, -6) d) (8, -8)



3 يبين الشكل المجاور المستطيل $RSBF$ ، إذا كان $SF = 2x + 15$ و $RB = 5x - 12$ ، فإن طول قطر المستطيل يساوي:

- a) 9 b) 1
c) 18 d) 33

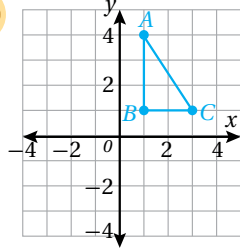


4 ما طول TU في الشكل المجاور؟

- a) 36 b) 90
c) 40 d) 48

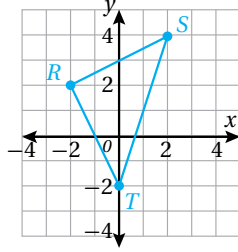
أنسخُ كلَّ مضلعٍ ممَّا يأتي على ورقةٍ مربعاتٍ، ثمَّ أرسمُ صورةً له تحت تأثيرِ تمديدٍ مركزه نقطة الأصل، مستعملًا معاملَ التمديدِ المعطى أسفله:

20



معاملُ التمددِ -3

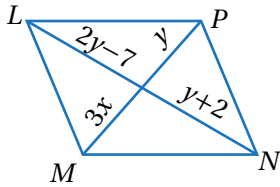
21



معاملُ التمددِ 1.5

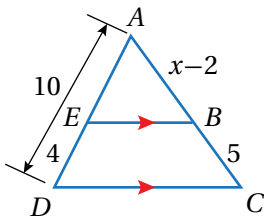
تدريبٌ على الاختبارات الدولية

22 قيمة x التي تجعل الشكل الرباعي $MLPN$ متوازي أضلاع هي:



- a) 1 b) 3 c) 9 d) 27

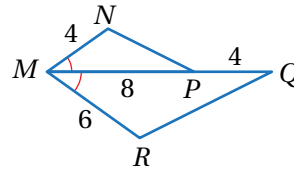
23 قيمة x في الشكل المجاور هي:



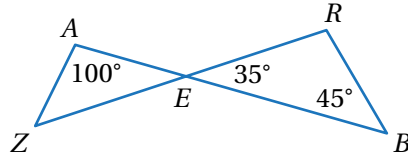
- a) 9.5 b) 5
c) 4 d) 2

أحدد ما إذا كان كلُّ مثلثين ممَّا يأتي متشابهين أم لا، وإذا كانا كذلك فأكتبُ عبارة التشابه، مبررًا إجابتي:

14

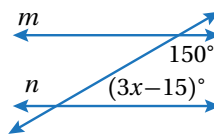


15

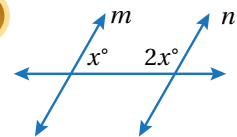


أجد قيمة x التي تجعل $m \parallel n$ في كلِّ ممَّا يأتي:

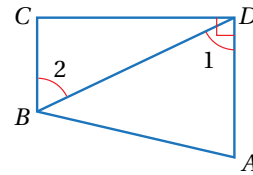
16



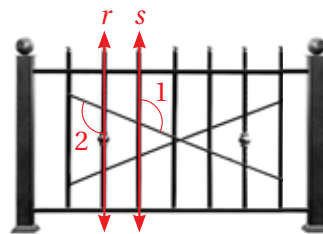
17



18 أستعملُ المعلوماتَ المعطاة في الشكل الآتي لأثبت أن $\overline{BC} \perp \overline{CD}$ باستعمال البرهان السهمي.



19 سياج: يبين الشكل الآتي سياجًا مكونًا من قطع حديدية مرتبة باتجاهات مختلفة. إذا افترضتُ أن $\angle 1 \cong \angle 2$ ، فهل المستقيمان r و s متوازيان؟ أبرر إجابتي.



الأشكال ثلاثية الأبعاد

ما أهمية هذه الوحدة؟

تُعَدُّ الهندسة ثلاثية الأبعاد واحدة من أكثر فروع الرياضيات استعمالاً في التطبيقات العلمية والحياتية، وقد استعملها العلماء لحساب حجم الكرة الأرضية ومساحة سطحها، ويستعملها المهندسون لتصميم المباني الجميلة.



سأتعلّم في هذه الوحدة:

- رسم أشكال ثلاثية الأبعاد باستعمال الرسم المتساوي ورسم المساقط.
- تحديد الشكل الناتج من تقاطع المجسم مع مستوى، وعدد مستويات التماثل للمجسمات.
- إيجاد مساحة سطح الكرة وحجمها.

تعلمت سابقاً:

- ✓ خواصّ الأشكال ثنائية الأبعاد.
- ✓ إيجاد المساحة الكلية والحجوم للأشكال ثلاثية الأبعاد.
- ✓ حساب مساحة الدائرة ومحيطها.



مشروع الوحدة: الأشكال ثلاثية الأبعاد

4 أنبي 3 تصاميم إضافية للمجسم الذي اخترته.

5 أقطع كل مجسم صمّمته قطعًا مختلفًا، ثم أصف الشكل الهندسي الناتج من القطع، ويمكنني تلوين جهة القطع لتسهيل وصفه.

6 أرسم كل قطع على ورقة مربعات.

7 أجد حجم المجسم الذي اخترته، وأجد مساحة سطحه الكلية.

8 أعد عرضًا تقديميًا يتضمن صورًا أو مقطعًا مرئيًا (فيديو) يوضح خطوات عملي في المشروع، والمساقط والمقاطع التي رسمتها.

عرض النتائج:

• أعرّض المجسمات التي صمّمتها أمام طلبة صفّي، وأوضح أهميّتها وعلاقتها بما تعلّمته في الوحدة.

• أقدم العرض التقديمي، وأحدث بالتفصيل عن خطوات المشروع والنتائج التي توصّلت إليها.

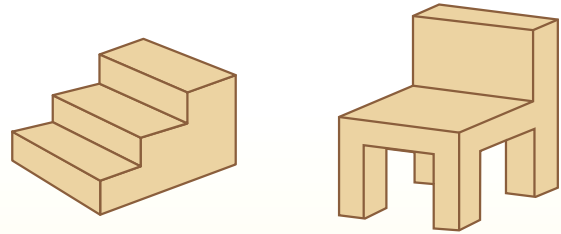
أستعدّ ومجموعتي لتنفيذ مشروعٍ الخاص الذي سنستعمل فيه ما سنتعلّمه في هذه الوحدة حول رسم الأشكال ثلاثية الأبعاد باستعمال الرسم المتساوي لإنشاء مجسم ورسم مساقطه.

المواد والأدوات:

- قطع بوليسترين.
- لاصق.
- أوراق منقطة متساوية القياس.

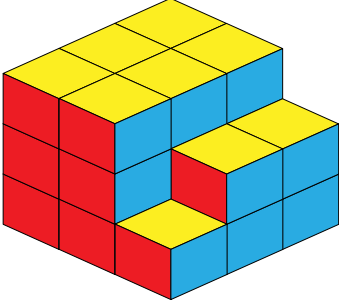
خطوات تنفيذ المشروع:

1 أختار أحد المجسمين الآتين، وأحدّد قياساته ثم أرسمه باستعمال الرسم المتساوي.



2 أنبي المجسم الذي صمّمته باستعمال قطع البوليسترين واللاصق.

3 أرسم المساقط: العلوي، والأمامي، والجانبّي، للمجسم الذي صمّمته على ورقة منقطة متساوية القياس.



أستكشف

ما عدد المكعبات التي
يتكوّن منها الجسم
المجاور؟

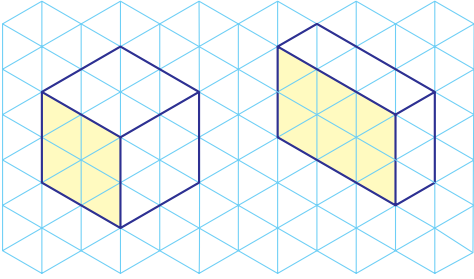
فكرة الدرس

أرسم أشكالاً ثلاثية الأبعاد باستعمال
الرسم المتساوي ورسم المساقط.

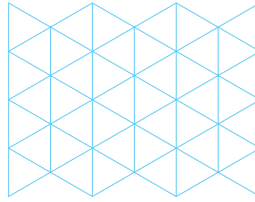
المصطلحات

الرسم المتساوي، المنظور،
المسقط العلوي، المسقط الأمامي،
المسقط الجانبي.

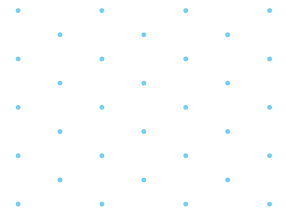
الرسم المتساوي (isometric drawing) طريقة لرسم الأشكال ثلاثية الأبعاد على ورقة ثنائية الأبعاد، تُستعمل فيها ورقة متساوية القياس مثلثة أو منقطة.



أشكال ثلاثية الأبعاد مرسومة على
ورقة مثلثة متساوية القياس



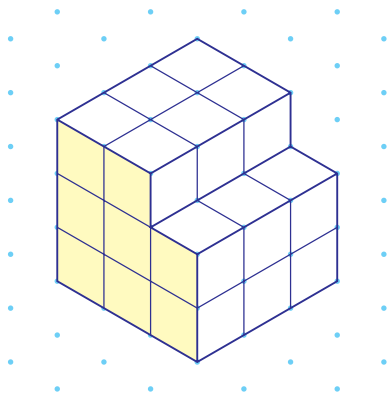
ورقة مثلثة متساوية
القياس



ورقة منقطة متساوية
القياس

مثال 1

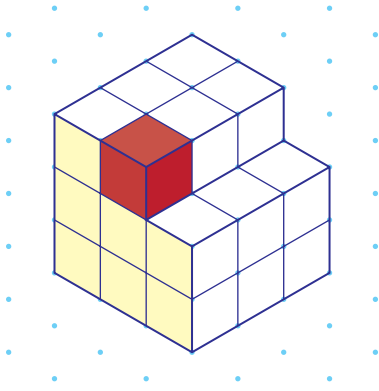
يبين الشكل المجاور مجسمًا ثلاثي الأبعاد مرسومًا على ورقة منقطة متساوية القياس مكوّنًا من مكعبات وحدة.



1 ما عدد مكعبات الوحدة التي يتكوّن منها الجسم؟

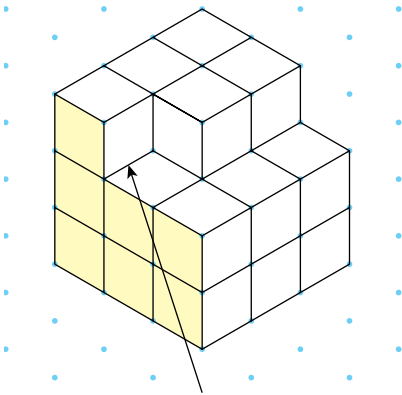
يتكوّن الجسم من ثلاث طبقات، وفي كلّ طبقة 8 مكعبات وحدة. إذن، يتكوّن الجسم من 24 مكعب وحدة.

الوحدة 8

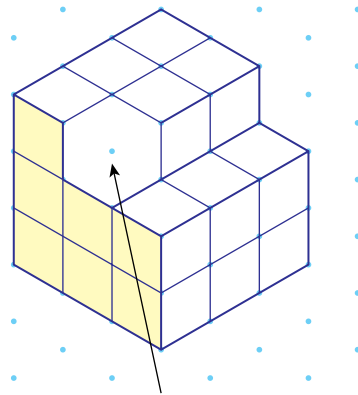


2 إذا أزيل المكعب الملون بالأحمر من المجسم،
فأرسم الشكل الجديد على ورقة منقطة متساوية
القياس.

الخطوة 2 أرسم الحواف التي أصبحت
ظاهرة من المكعبات المحيطة بالمكعب الأحمر.



الخطوة 1 أزيل الحواف الثلاث الظاهرة
للمكعب الأحمر.



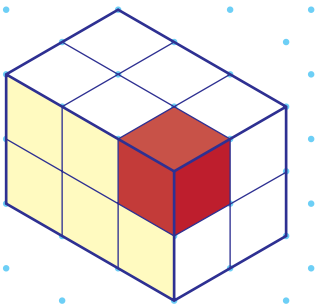
✓ أتحقق من فهمي:

يبيّن الشكل المجاور مجسمًا ثلاثي الأبعاد مرسومًا على ورقة منقطة متساوية القياس
مكوّنًا من مكعبات وحدة.

1 ما عدد مكعبات الوحدة التي يتكوّن منها المجسم؟

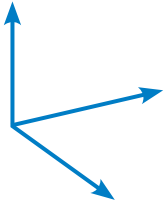
2 إذا أزيل المكعب الأحمر من المجسم، فأرسم الشكل الجديد على ورقة منقطة
متساوية القياس.

ملحوظة: أستخدم الورق المنقط متساوي القياس الموجود في كتاب التمارين.



ألاحظ من الرسم المتساوي في الأمثلة السابقة أن:

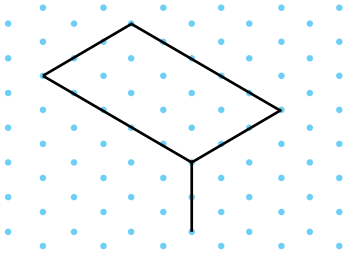
- الحواف مرسومة في ثلاثة اتجاهات.
- الحواف المخفية لا تظهر في الرسم.
- أحد الأوجه يظل للمساعدة على تصور الشكل ثلاثي الأبعاد.



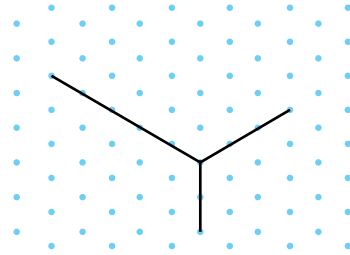
مثال 2

أرسم على ورقة منقطة متساوية القياس متوازي مستطيلات طوله 5 وحدات، وعرضه 3 وحدات، وارتفاعه وحدتان.

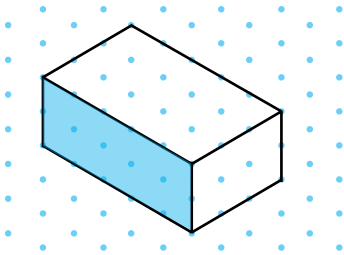
الخطوة 2 أكمل رسم المستطيل العلوي للمجسم.



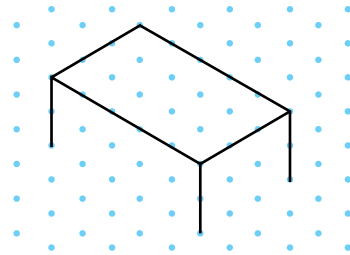
الخطوة 1 أبدأ من نقطة محددة على الورقة، وأرسم منها ثلاث حواف للمجسم في ثلاثة اتجاهات؛ وحدتان للأسفل، و5 وحدات لليسار، و3 وحدات لليمين.



الخطوة 4 أصل بين الرؤوس المتقابلة، ثم أظلل الوجه الأمامي من المجسم.



الخطوة 3 أرسم القطع المستقيمة الرأسية الظاهرة من المجسم بطول وحدتين.



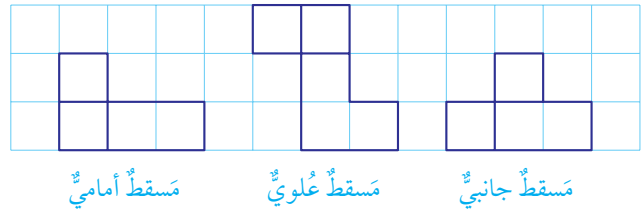
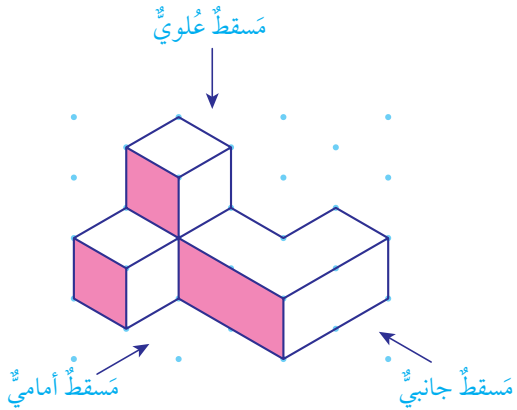
أتحقق من فهمي: ✓

أرسم على ورقة منقطة متساوية القياس متوازي مستطيلات طوله 4 وحدات، وعرضه 3 وحدات، وارتفاعه 3 وحدات.

الوحدة 8

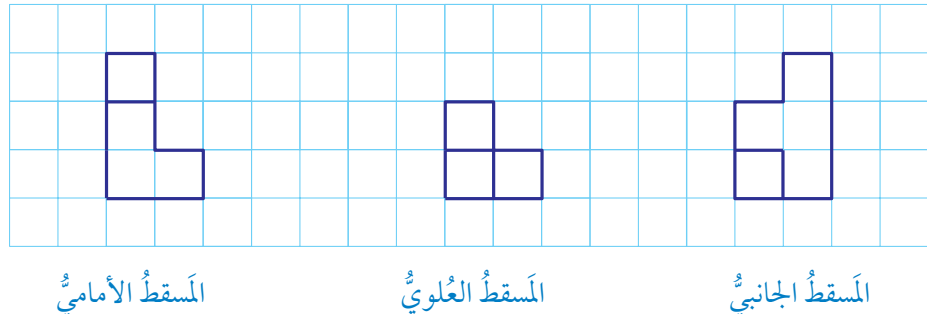
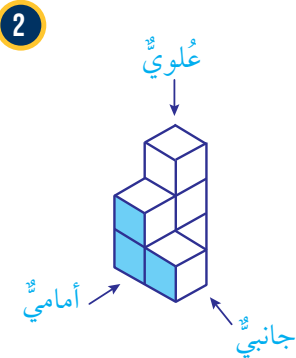
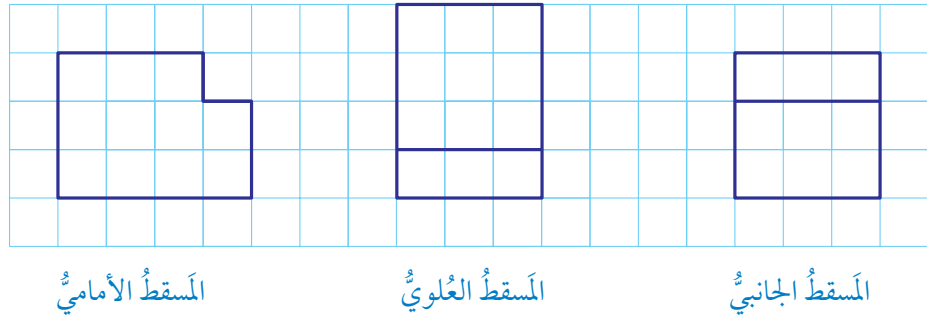
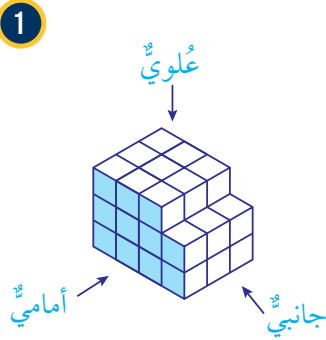
تُسمى النقطة التي يُنظر للمجسم من خلالها **المنظور** (perspective)، وتُستعمل منظورات مختلفة عند رسم المجسم؛ لأنَّ منظورًا واحدًا لا يُعطي تصوّرًا مكتملاً عن المجسم.

يُعدُّ **المسقط العلوي** (plan view) المنظور العلوي للمجسم، و**المسقط الأمامي** (front view) المنظور الأمامي للمجسم، و**المسقط الجانبي** (side view) المنظور الجانبي للمجسم.



مثال 3

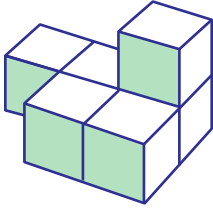
أرسم المساقط: العلوي، والأمامي، والجانبي، لكلٍّ من المجسمات الآتية:



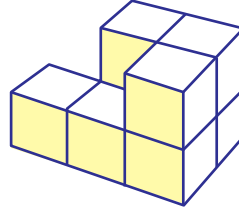
أتحقق من فهمي:



3

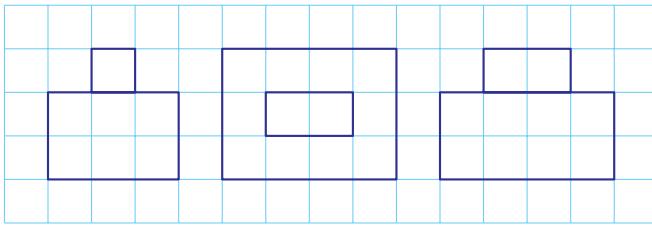


4



يمكن استعمال المساقط وورقة منقطة متساوية القياس لرسم أشكال ثلاثية الأبعاد.

مثال 4

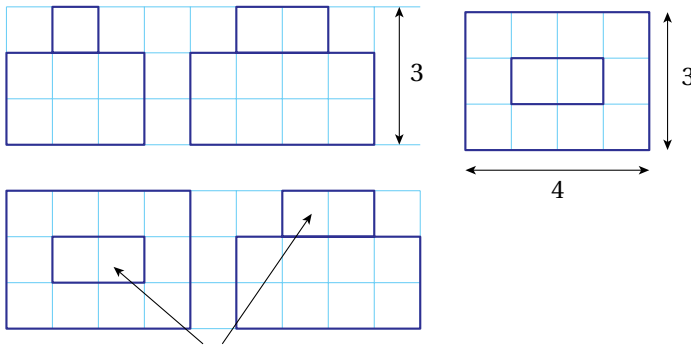


مَسْقَطُ أَمَامِيّ

مَسْقَطُ عَلَوِيّ

مَسْقَطُ جَانِبِيّ

أستعمل ورقة منقطة متساوية القياس والمساقط المجاورة، لرسم المجسم من مكعبات وحدة.

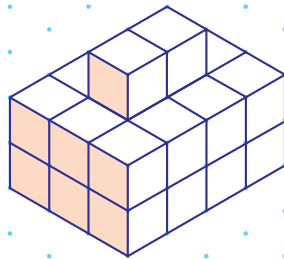


• يُظهر المَسْقَطُ العُلَوِيّ أنَّ قاعدة المجسم على شكل مستطيل طوله 4 وحدات وعرضه 3 وحدات.

• يُظهر المَسْقَطُ الأمامي أنَّ الارتفاع الكلي للمجسم 3 وحدات.

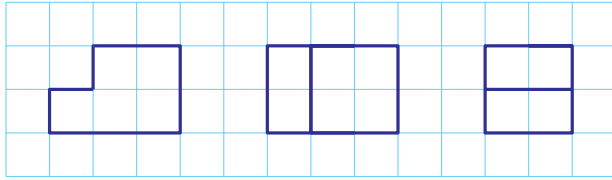
• يُظهر المَسْقَطُ الأمامي أنَّ المجسم متوازي مستطيلات يعلوه مكعبان متجاوران في المنتصف.

• أرسّم المجسم الذي توصّلتُ إلى وصفه من خلال المساقط على الورقة المنقطة متساوية القياس، ثمَّ أظلل الجهة الأمامية.



الوحدة 8

أتحقق من فهمي:



مَسْقَطٌ جانبيّ

مَسْقَطٌ علويّ

مَسْقَطٌ أماميّ

أستعملُ ورقةً منقّطةً متساوية القياسِ والمساقطِ المجاورة، لرسمِ المجسّمِ مِنْ مكعباتٍ وَحدةٍ.

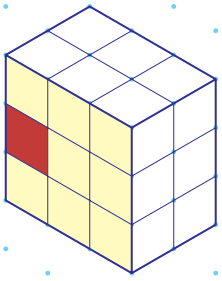
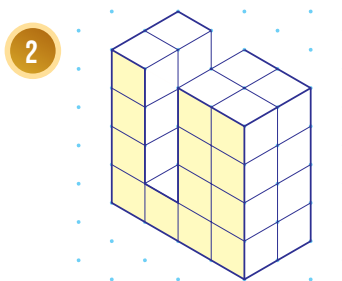
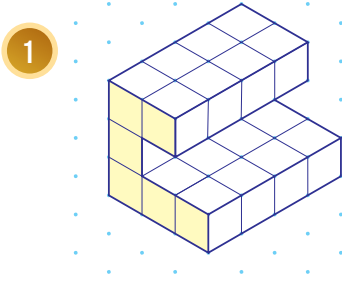
ملحوظة: أستخدمُ الورقَ المنقّطَ متساوي

القياسِ الموجودَ في كتابِ التمارين.

أدرب وأحل المسائل



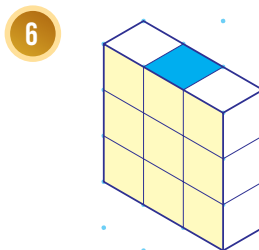
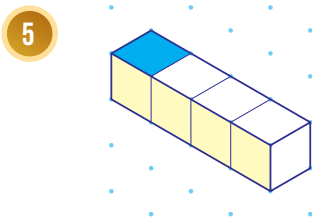
أجدُ عددَ مكعباتِ الوحدةِ التي يتكوّنُ مِنْهَا كُلُّ مجسّمٍ ممّا يأتي:



3 ما عددُ مكعباتِ الوحدةِ التي يتكوّنُ مِنْهَا المجسّمُ المجاور؟

4 إذا أُزيلَ المكعبُ الأحمرُ مِنَ المجسّمِ، فأرسمُ الشكلَ الجديدَ على ورقةٍ منقّطةٍ متساوية القياسِ.

إذا وُضِعَ مكعبُ وَحدةٍ فوقَ كُلِّ متوازي مستطيلاتٍ ممّا يأتي ليغطّي المربعَ المرسومَ باللّونِ الأزرقِ، فأرسمُ الشكلَ الجديدَ على ورقةٍ منقّطةٍ متساوية القياسِ:



أفكّر

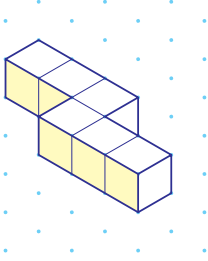
كَمْ حافةً أُزيلَ مِنَ
المجسّمِ لأزيلَ المكعبَ
الأحمرَ؟

7 أرسم متوازي مستطيلات على ورقة منقطة متساوية القياس طولها 3 وحدات، وعرضها 3 وحدات، وارتفاعها 6 وحدات.

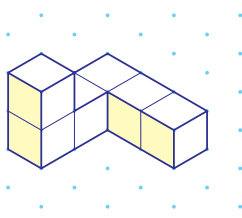
8 أرسم متوازي مستطيلات على ورقة منقطة متساوية القياس طولها 4 وحدات، وعرضها وحدتان، وارتفاعها 3 وحدات.

يتكوّن كل مجسم ممّا يأتي من 6 مكعبات وحدة. أجد أقل عدد من مكعبات الوحدة التي يمكن إضافتها إلى كل مجسم ليصبح متوازي مستطيلات:

9



10

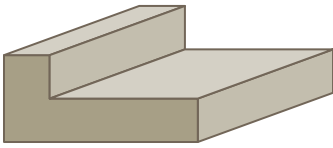


إرشاد

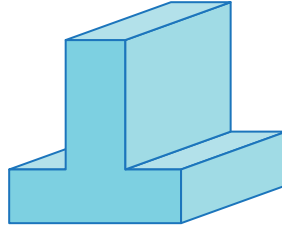
أحدّد مواقع المكعبات الستة التي تكمل الشكل إلى متوازي مستطيلات أولاً قبل البدء بالرسم.

أرسم كل مجسم ممّا يأتي على ورقة منقطة متساوية القياس:

11

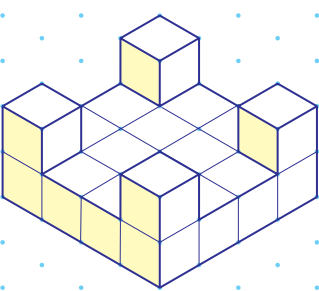


12

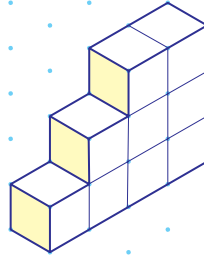


أرسم المساقط: العلوي، والأمامي، والجانبّي، لكل من المجسمات الآتية:

13



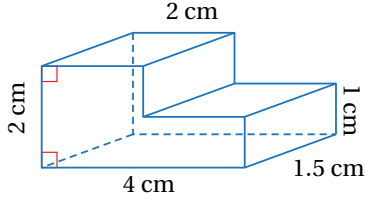
14



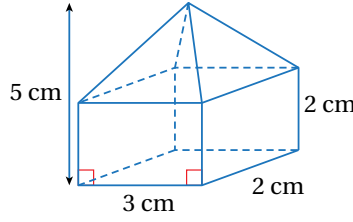
الوحدة 8

أرسم المساقط: العلوي، والأمامي، والجانبّي، لكلٍّ من المجسّات الآتية: (أرسم كلَّ مسقطٍ بأبعاده الحقيقية)

15

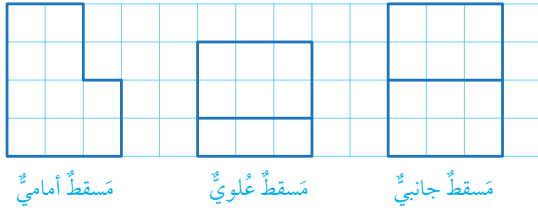


16

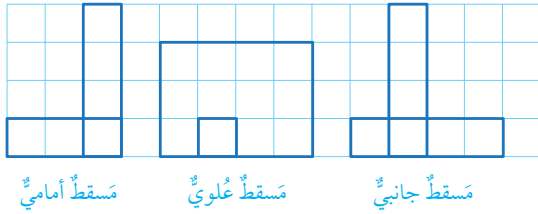


أستعمل ورقة منقّطة متساوية القياس والمساقط المعطاة، لرسم كل مجسّم ممّا يأتي من مكعبات وحدة:

17



18



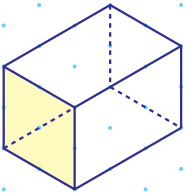
إرشاد

الحدود التي تظهر داخل المساقط تدلّ على وجود ارتفاعات مختلفة للمجسّم.

مهارات التفكير العليا

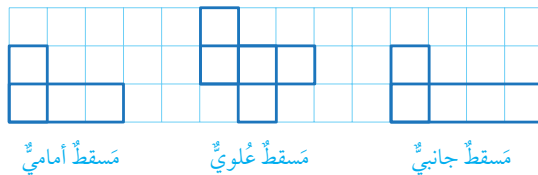
19

أكتشف الخطأ: رسم عامر متوازي المستطيلات المجاور على ورقة منقّطة متساوية القياس. أكتشف الخطأ الذي وقع فيه عامر، وأصحّحه بإعادة رسم المتوازي على ورقة منقّطة متساوية القياس.



20

نحد: أستخدم ورقة منقّطة متساوية القياس، لرسم المجسّم المعطى مساقطه في ما يأتي من مكعبات وحدة.



21

أكتب كيف أرسم المساقط الثلاثة لمجسّم؟

أستكشفُ



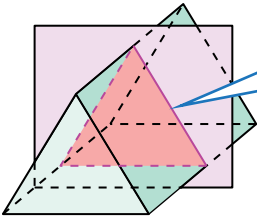
كيفَ يمكنُ تقطيعَ
قطعةِ الجبنِ المجاورةِ
للحصولِ على شرائحَ
مستطيلةِ الشكلِ؟

فكرة الدرس

- أحدّد الشكل الناتج من تقاطع المجسم مع مستوى.
- أحدّد عدد مستويات التماثل للمجسم.
- أتعرف المجسمات الدّورانية.

المصطلحات

المقطع، المقطع العرضي، المنشور، مستوى التماثل،
المجسم الدّوراني، محور الدّوران.

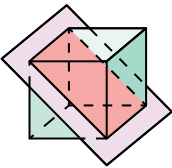


المقطع العرضي مثلث

أفترض أن مستوى قطع مجسمًا، عندها يُسمّى الشكل ثنائي الأبعاد الناتج من تقاطع مستوى مع مجسم **مقطعًا** (section). فمثلاً، يبيّن الشكل المجاور أن تقاطع مستوى ومنشور ثلاثي هو مثلث. ويُسمّى المقطع الموازي لقاعدة المجسم **المقطع العرضي** (cross section).

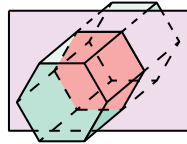
مثال 1 أحدّد المقطع الناتج من تقاطع المستوى والمجسم في كلٍّ ممّا يأتي، وأحدّد أيّ المقاطع هو مقطع عرضي:

1



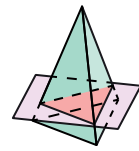
المقطع مستطيل.

2



المقطع سداسي، وهو مقطع عرضي؛ لأنّه موازٍ للقاعدة.

3

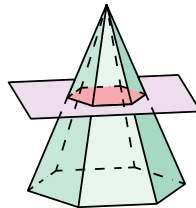


المقطع مثلث، وهو مقطع عرضي؛ لأنّه موازٍ للقاعدة.

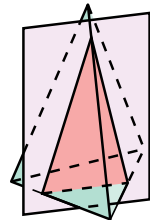
4



5



6



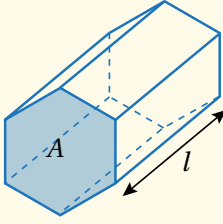
✓ **أتحقّق من فهمي:**

الوحدة 8

المنشور (prism) هو شكل ثلاثي الأبعاد، له قاعدتان مضمّلتان متطابقتان ومتوازيتان، ومقاطع العرضية جميعها متطابقة، ويمكن إيجاد حجم المنشور بضرب مساحة المقطع العرضي له (القاعدة) في ارتفاعه.

حجم المنشور

مفهوم أساسي

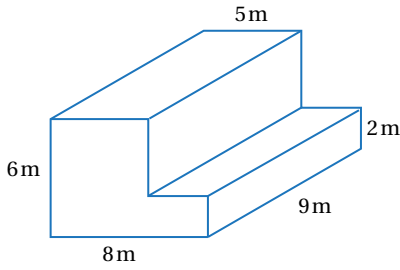


• **بالكلمات:** حجم المنشور يساوي ناتج ضرب مساحة مقطعه العرضي في ارتفاعه.

• **بالرموز:** $V = Al$

حيث l ارتفاع المنشور، و A مساحة المقطع العرضي للمنشور.

مثال 2



أجد حجم المنشور المجاور.

الخطوة 1 أجد مساحة المقطع العرضي.

أجد مساحة المقطع العرضي (A) بجمع مساحتي المستطيلين A_1 و A_2

$A = A_1 + A_2$ صيغة مساحة المقطع العرضي

$= (l_1 \times w_1) + (l_2 \times w_2)$ صيغة مساحة المستطيل

$= (6 \times 5) + (3 \times 2)$ أعوض

$= 30 + 6 = 36$ أجد الناتج

إذن، مساحة المقطع العرضي للمنشور 36 m^2

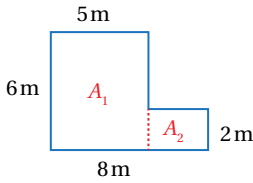
الخطوة 2 أجد حجم المنشور.

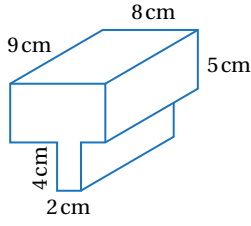
$V = Al$ صيغة حجم المنشور

$= 36 \times 9$ أعوض

$= 324$ أجد الناتج

إذن، حجم المنشور 324 m^3

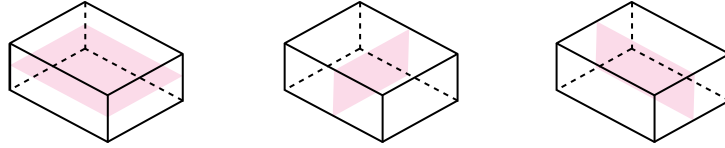




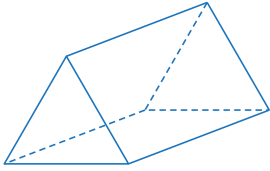
✓ **أتحقق من فهمي:**

أجد حجم المنشور المجاور.

مستوى التماثل (plane of symmetry) هو مستوى يقسم الشكل ثلاثي الأبعاد إلى نصفين متطابقين كل منهما صورة مرآة للآخر، فمثلاً تبيّن الأشكال الآتية مستويات التماثل جميعها لمتوازي المستطيلات.



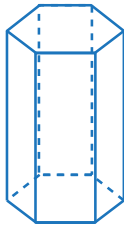
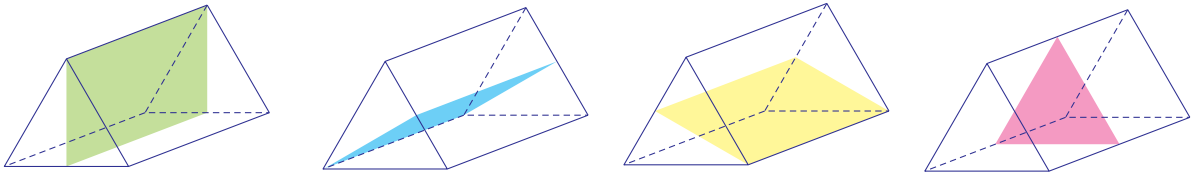
مثال 3



يبيّن الشكل المجاور منشورًا ثلاثيًا قاعدته مثلث متطابق الأضلاع. أحدّد عدد مستويات التماثل للمنشور.

بما أنّ قاعدة المنشور مثلث متطابق الأضلاع، فإنّ لها ثلاثة خطوط تماثل، وهذا يعني أنّ للمنشور مستوى تماثل مرتبطاً بكلّ من هذه الخطوط الثلاثة، ويوجد أيضاً مستوى تماثل مواز للقاعدة يقطع المنشور إلى نصفين متطابقين.

ومنهُ فإنّ المجموع الكليّ لمستويات تماثل هذا المنشور هو 4 مستويات.



✓ **أتحقق من فهمي:**

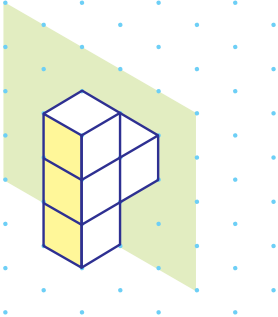
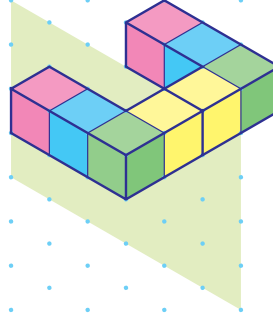
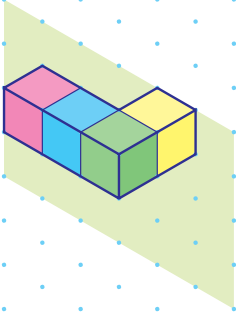
أحدّد عدد مستويات التماثل للمنشور السداسيّ المنتظم المجاور.

الوحدة 8

يمكنُ إكمالُ الرَّسْمِ المتساوي لشكلٍ ثلاثيِّ الأبعادٍ إذا علمتُ مستوى تماثلِ الشكلِ وأحدَ النصفينِ المتطابقينِ حوله.

مثال 4

أكملُ رسْمَ المجسِّمِ في الشكلِ المجاورِ، علماً بأنَّ المستوى المظللَ مستوى تماثلٍ. بما أنَّه توجدُ 4 مكعباتٍ في الشكلِ، فهذا يعني أنَّه يجبُ إضافةُ 4 مكعباتٍ أخرى على الجهةِ الأخرى من مستوى التناظرِ.



أتتحقق من فهمي:

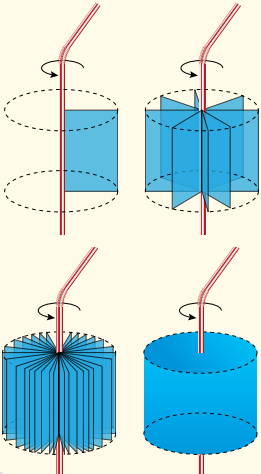


أكملُ رسْمَ المجسِّمِ في الشكلِ المجاورِ، علماً بأنَّ المستوى المظللَ مستوى تماثلٍ. ملحوظة: أستخدمُ الورقَ المنقَّطَ متساويَ القياسِ الموجودَ في كتابِ التمارينِ.

المجسّماتُ الدّورانيةُ

نشاطٌ هندسيٌّ

الإجراءاتُ:



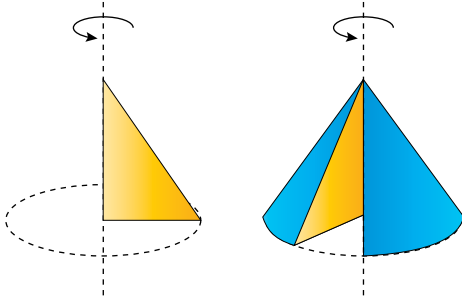
1 الخُطوةُ: أرسمُ مستطيلاً على ورقةٍ مقوَّاةٍ، ثُمَّ أقصُّه.

2 الخُطوةُ: أستخدمُ شريطاً لاصقاً لتثبيتِ المستطيلِ على ماصَّةٍ.

3 الخُطوةُ: أدورُّ نهايةَ الماصَّةِ بَيْنَ يَدَيَّ، وأراقبُ النتيجةَ.

أحلُّ النتائجِ:

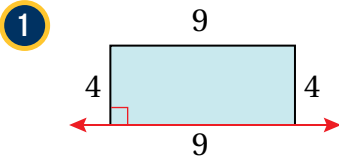
ما المجسِّمُ الناتجُ مِنْ دَوْرانِ المستطيلِ حَوْلَ الماصَّةِ؟



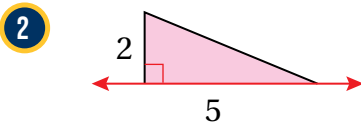
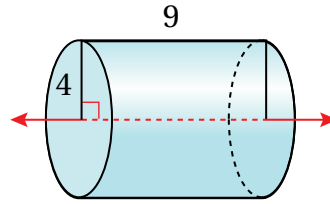
المجسّم الدّوراني (solid of revolution) هو شكل ثلاثيّ الأبعاد ناتج من دوران شكل مستوٍ حول محور، ويُسمّى المستقيم الذي يدور حوله الشكل المستوي **محور الدّوران** (axis of revolution). فمثلاً، عند تدوير مثلث حول محور يحوي أحد أضلاعه، فإنّ المجسّم الدّوراني الناتج مخروط.

مثال 5

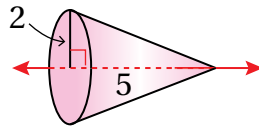
أصف المجسّم الدّوراني الناتج من دوران كلّ من الأشكال المستوية الآتية حول المحور المعطى، ثمّ أحدد قياساته وأرسمه:



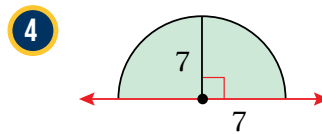
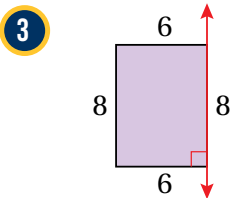
المجسّم الدّوراني الناتج أسطوانة ارتفاعها 9 وطول نصف قطرها 4



المجسّم الدّوراني الناتج مخروط ارتفاعه 5 وطول نصف قطره 2



✓ **أتحقّق من فهمي:**



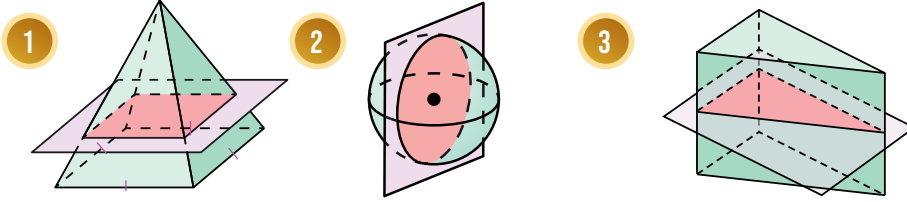
الوحدة 8

أحدّد المقطع الناتج من تقاطع المستوى والمجسم في كلّ ممّا يأتي، وأحدّد أيّ المقاطع هو مقطع عرضي:

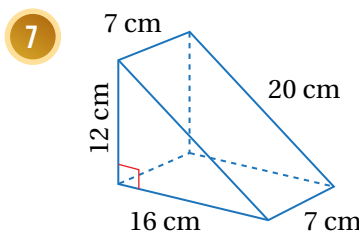
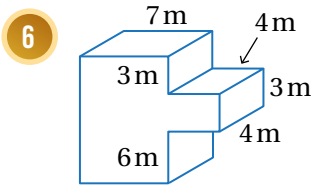
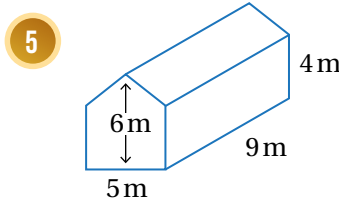
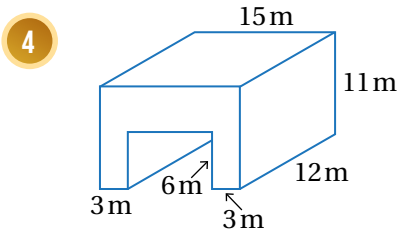
أتحرب وأحل المسائل

معلومة

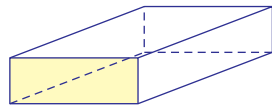
للمقاطع أهمية كبيرة في دراسة الهياكل التشريحية للحيوانات والنباتات، ومن خلالها كشف العلماء النقاب عن الأنسجة والأعضاء المخفية.



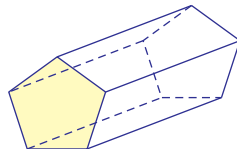
أجد حجم كلّ منشور ممّا يأتي:



بيّن الشكل الآتي متوازي مستطيلات، أحدّد عدد مستويات التماثل لهذا المتوازي.



بيّن الشكل الآتي منشورًا خماسيًا منتظمًا، أحدّد عدد مستويات التماثل لهذا المنشور.

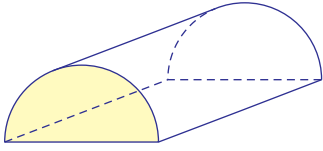


8

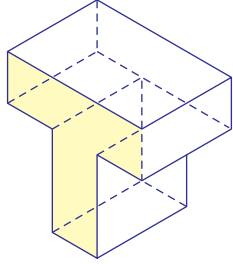
أفكر

إذا كانت قاعدة المنشور مضلعًا منتظمًا، فما علاقة ذلك بمستويات التماثل؟

9



10 يبيّن الشكل المجاور مجسمًا مقطّعه العرضي نصف دائرة، أحدّد عدد مستويات التماثل لهذا المجسم.

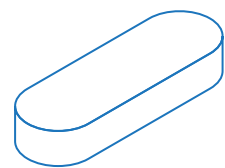
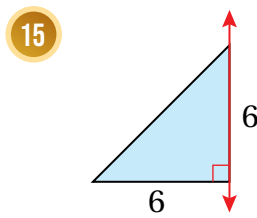
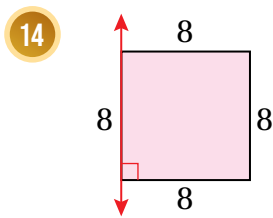


11 يبيّن الشكل المجاور منشورًا مقطّعه العرضي على شكل حرف T، أحدّد عدد مستويات التماثل لهذا المنشور.

أكمل رسم المجسم في كلّ ممّا يأتي، علمًا بأنّ المستوى المظلل مستوى تماثل:



أصف المجسم الدوراني الناتج من دوران كلّ من الأشكال المستوية الآتية حول المحور المعطى، ثمّ أحدّد قياساته وأرسمه:



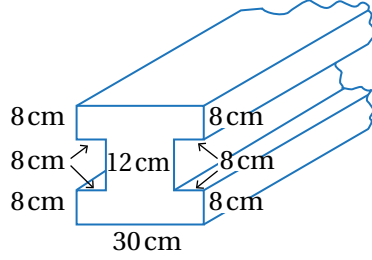
16 **علبة:** يبيّن الشكل المجاور علبةً سطحها العلوي والسفلي متطابقان، وكلاهما مكوّن من مستطيل طوله 9 cm وعرضه 4 cm مع نصف دائرة عند كلّ نهاية. إذا كان ارتفاع العلبة 3 cm، فأجد حجمها.

إرشاد

أستعمل الورق المنقّط
متساوي القياس الموجود
في كتاب التمارين.

الوحدة 8

دعامة فولاذية: يبين الشكل الآتي المقطع العرضي لدعامة فولاذية على شكل منشور، طولها 2 m، إذا كانت كتلة 1 cm^3 من الفولاذ 79 g، فأجد كتلة الدعامة.

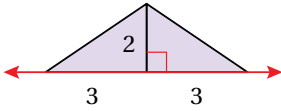


أتذكر

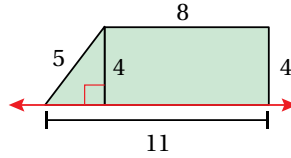
يُعدُّ الفولاذُ المادة الأكثر شيوعاً لبناء البنية التحتية، وفي الصناعات حول العالم؛ فهو يستخدم لتصنيع جميع المواد بدءاً من الإبرة إلى ناقلات البترول.

تبرير: أرسم المجسم المركب الناتج من تدوير كلٍّ من الأشكال المستوية الآتية حول المحور المعطى، ثم أصف المجسم المركب الناتج وأحدد قياساته:

18

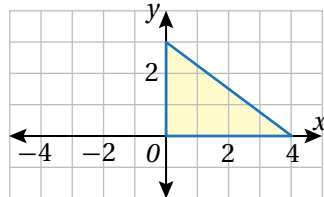


19



تحذ: أرسم على ورقة منقطة متساوية القياس مجسماً مكوناً من 6 مكعبات وحدة له 5 مستويات تماثل.

تبرير: أجد المساحة الكلية لسطح المجسم الناتج من دوران المثلث الآتي حول المحور y ، مبرراً إجابتي. (أكتب الإجابة بدلالة π)



إرشاد

أحدد أبعاد المجسم الناتج عن الدوران أولاً؛ لأتمكن من إيجاد مساحة سطحه الكلية.

كيف يمكن تحديد عدد مستويات التماثل للمجسم؟

أكتب

22



أستكشف

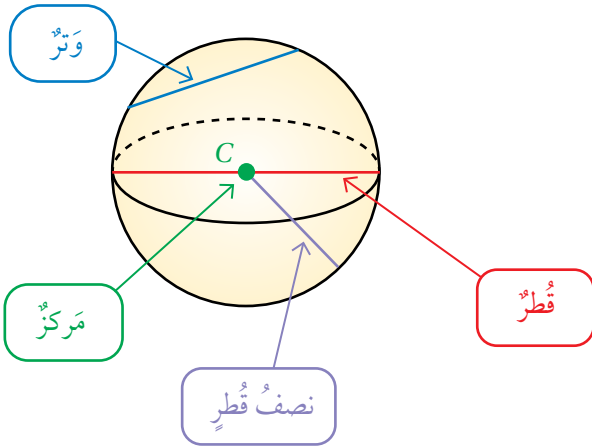
كَمْ سَتَتِمَتْرًا مَرَبَعًا مِّنَ
الْجِلْدِ يَلْزَمُ لِصَنْعِ الْكُرَةِ
الْمَجَاوِرَةِ؟

فكرة الدرس

أَجْدُ مَسَاحَةَ سَطْحِ الْكُرَةِ وَحَجْمَهَا.

المصطلحات

الكرة، الدائرة الكبرى، نصف الكرة.

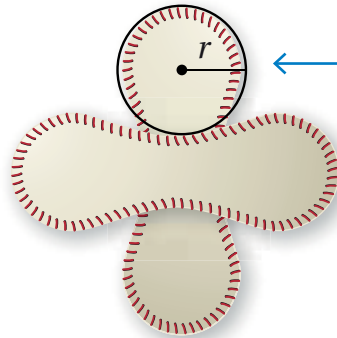


الكرة (sphere) هي مجموعة النقاط جميعها في الفضاء التي
تبعدُ بعدًا ثابتًا عن نقطة معلومة تُسمى مركز الكرة.

- نصف قطر الكرة هو قطعة مستقيمة تصل بين مركز
الكرة وأي نقطة على الكرة.
- وتر الكرة هو قطعة مستقيمة طرفيها أي نقطتين على
الكرة.
- قطر الكرة وتر يمر في المركز.

يمكن إيجاد صيغة لمساحة سطح الكرة بقص كرة كما في الشكل أدناه وملاحظة القطعتين اللتين تتكون منهما.

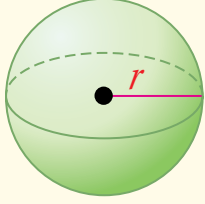
ألاحظ أن كل قطعة مكونة تقريبًا من دائرتين متطابقتين متصلتين، مما يعني أن الكرة بأكملها مكونة من 4 دوائر متطابقة تقريبًا
طول نصف قطر كل منها r ، وبما أن مساحة الدائرة $A = \pi r^2$ ، فإن مساحة القطع التي تتكون منها الكرة تساوي $4\pi r^2$ ،
وهذه هي الصيغة العامة لمساحة سطح الكرة.



مساحة كل دائرة
تساوي تقريبًا πr^2

مساحة سطح الكرة

مفهوم أساسي



• **بالكلمات:** مساحة سطح الكرة ($S.A$) هي حاصل ضرب 4π في مربع طول نصف قطرها.

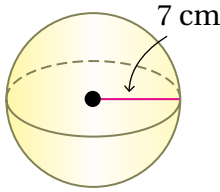
• **بالرموز:** $S.A = 4\pi r^2$

حيث r طول نصف قطر الكرة.

مثال 1

أجد مساحة سطح كل كرة مما يأتي، وأقرب إجابتي لأقرب جزء من عشرة:

1



$$S.A = 4\pi r^2$$

$$= 4\pi(7)^2$$

$$= 196\pi$$

$$\approx 615.8$$

صيغة مساحة سطح الكرة

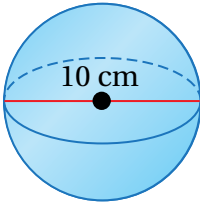
$$r = 7 \text{ أَوْض}$$

أَبَسِّطُ

أستعمل الآلة الحاسبة

إذن، مساحة سطح الكرة $196\pi \text{ cm}^2$ ، أو 615.8 cm^2 تقريبًا.

2



بما أن طول قطر الكرة 10 cm فإن هذا يعني أن طول نصف قطرها 5 cm

$$S.A = 4\pi r^2$$

$$= 4\pi(5)^2$$

$$= 100\pi$$

$$\approx 314.2$$

صيغة مساحة سطح الكرة

$$r = 5 \text{ أَوْض}$$

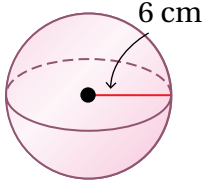
أَبَسِّطُ

أستعمل الآلة الحاسبة

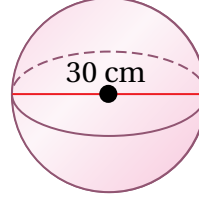
إذن، مساحة سطح الكرة $100\pi \text{ cm}^2$ ، أو 314.2 cm^2 تقريبًا.

أتحقق من فهمي: ✓

3

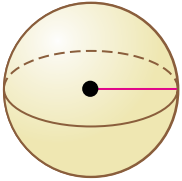


4



يمكن إيجاد طول قطر الكرة إذا علمت مساحة سطحها.

مثال 2



$$S.A = 30\pi \text{ m}^2$$

أجد طول قطر الكرة المجاورة إذا علمت أن مساحة سطحها $30\pi \text{ m}^2$ ، وأقرب إجابتي لأقرب جزء من عشرة.

$$S.A = 4\pi r^2$$

صيغة مساحة سطح الكرة

$$30\pi = 4\pi r^2$$

$$S.A = 30\pi$$

$$r^2 = 7.5$$

أقسم طرفي المعادلة على 4π

$$r = \pm \sqrt{7.5}$$

تعريف الجذر التربيعي

$$= \pm 2.7$$

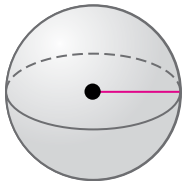
أستعمل الآلة الحاسبة

إذن، طول نصف قطر الكرة يساوي 2.7 m تقريبًا. أجد طول قطرها ($2r$) كالآتي:

$$2r = 2 \times 2.7 = 5.4$$

إذن، طول قطر الكرة يساوي 5.4 m تقريبًا.

أتحقق من فهمي: ✓

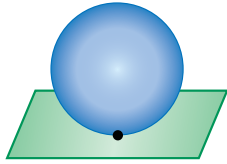


$$S.A = 20.25\pi \text{ m}^2$$

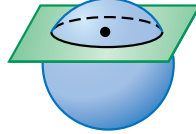
أجد طول قطر الكرة المجاورة إذا علمت أن مساحة سطحها $20.25\pi \text{ m}^2$ ، وأقرب إجابتي لأقرب جزء من عشرة.

الوحدة 8

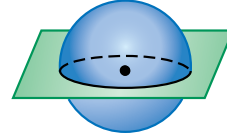
إذا قطع مستوى كرة فإنه يقطعها في نقطة أو في دائرة، وإذا كان المستوى يحتوي مركز الكرة فعندها يُسمى هذا التقاطع **الدائرة الكبرى** (great circle)، فالدائرة الكبرى لها مركز الكرة نفسه، وطول نصف قطرهما مساوٍ لطول نصف قطر الكرة، ومحيطها هو محيط الكرة نفسه.



نقطة



دائرة

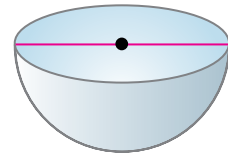
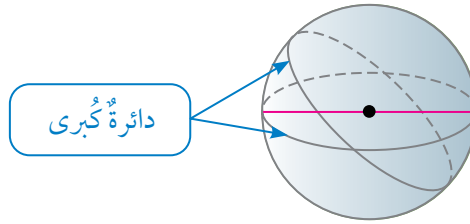


دائرة كبرى

تقسم كل دائرة كبرى الكرة إلى نصفين متطابقين يُسمى كل منهما **نصف كرة** (hemisphere).

أَتَعَلَّمُ

تحتوي الكرة
عددًا لا نهائيًا من
الدوائر الكبرى.



نصف كرة

مثال 3: من الحياة



الكرة الأرضية: يبلغ طول خط استواء الكرة الأرضية حوالي 40070 km تقريبًا. أجد مساحة سطح الكرة الأرضية التقريبية، مقربًا إجابتي لأقرب جزء من عشرة. بما أن خط الاستواء يمثل محيط دائرة كبرى للكرة الأرضية، فطولُه يمثل محيط الكرة الأرضية.

الخطوة 1 أجد طول نصف قطر الكرة الأرضية.

$$C = 2\pi r$$

$$40070 = 2\pi r$$

$$r \approx 6377.3$$

صيغة محيط الدائرة

$$C = 40070$$

أعوّض

أستعمل الآلة الحاسبة

إذن، طول نصف قطر الكرة الأرضية 6377.3 km تقريبًا.



الخطوة 2 أستخدم نصف القطر لإيجاد مساحة سطح الكرة الأرضية.

$$S.A = 4\pi r^2$$

$$= 4\pi(6377.3)^2$$

$$\approx 511073731$$

صيغة مساحة سطح الكرة

$$r = 6377.3$$

أستخدم الآلة الحاسبة

إذن، مساحة سطح الكرة الأرضية 511073731 km^2 تقريبًا.



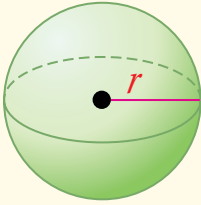
أتحقق من فهمي:

كرة: يبلغ محيط كرة بلاستيكية 60 cm ، أجد مساحة سطحها التقريبية مقربًا إجابتي لأقرب عدد صحيح.

يمكن إيجاد حجم الكرة باستعمال القاعدة الآتية:

حجم الكرة

مفهوم أساسي



• **بالكلمات:** حجم الكرة (V) يساوي حاصل ضرب $\frac{4}{3}\pi$ في مكعب طول نصف قطرها.

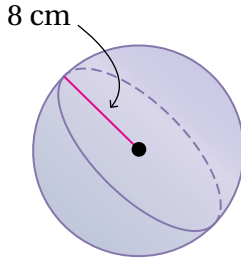
• **بالرموز:** $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

حيث r طول نصف قطر الكرة.

مثال 4

أجد حجم كل كرة أو نصف كرة مما يأتي، مقربًا إجابتي لأقرب عدد صحيح:

1



$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{4}{3}\pi (8)^3$$

$$= \frac{2048}{3}\pi$$

$$\approx 2145$$

صيغة حجم الكرة

$$r = 8$$

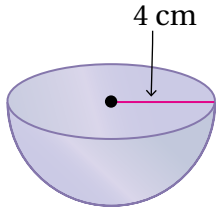
أبسط

أستخدم الآلة الحاسبة

إذن، حجم الكرة 2145 cm^3 تقريبًا.

الوحدة 8

2



$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi (4)^3 \right) \\ &= \frac{128}{3} \pi \\ &\approx 134 \end{aligned}$$

صيغة حجم نصف الكرة

أعوّض $r = 4$

أبسّط

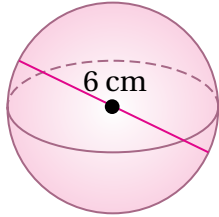
أستعمل الآلة الحاسبة

إذن، حجم نصف الكرة 134 cm^3 تقريبًا.

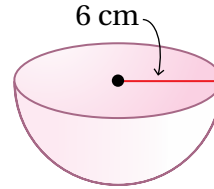
أتحقق من فهمي:



3

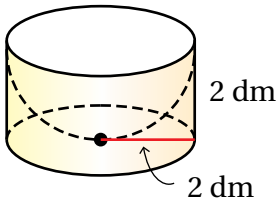


4



يمكن إيجاد حجم المجسم المركب بتحديد الأشكال الهندسية التي يتكوّن منها والعملية الحسابية اللازمة لإيجاد حجمه.

مثال 5



المجسم المجاور أسطوانة تحتوي نصف كرة مفرغة، أجد حجم الجزء المتبقي من الأسطوانة دون نصف الكرة مقربًا إجابتي لأقرب جزء من مئة.

لإيجاد حجم الجزء المتبقي من الأسطوانة دون نصف الكرة (V)، أطرّح حجم نصف الكرة (V_2) من حجم الأسطوانة (V_1)

$$V = V_1 - V_2$$

صيغة حجم المجسم

$$= \pi r^2 h - \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right)$$

بتعويض صيغتي حجم الأسطوانة وحجم نصف الكرة

$$= \pi (2)^2 (2) - \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi (2)^3 \right)$$

أعوّض $r = 2$, $h = 2$

$$= 8\pi - \frac{16}{3} \pi$$

أبسّط

$$= \frac{8}{3} \pi$$

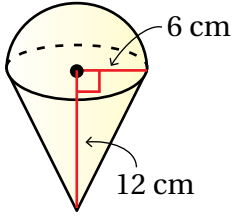
أطرّح

$$\approx 8.38$$

أستعمل الآلة الحاسبة

إذن، حجم المجسم $\frac{8}{3} \pi \text{ dm}^3$ أو 8.38 dm^3 تقريبًا.

أتحقق من فهمي:

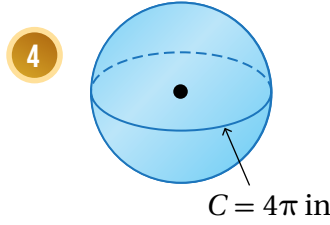
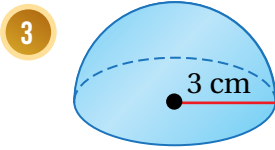
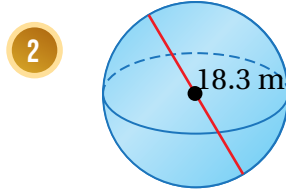
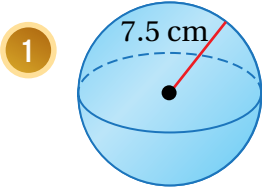


أجد حجم المجسم المجاور، المكوّن من مخروط ارتفاعه 12 cm يعلوه نصف كرة طول نصف قطرها 6 cm، مقرباً إجابتي لأقرب جزء من مئة.

أتحرب وأحل المسائل



أجد مساحة سطح كلّ كرة أو نصف كرة ممّا يأتي، وأقرب إجابتي لأقرب جزء من عشرة:



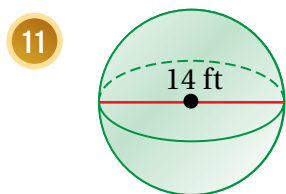
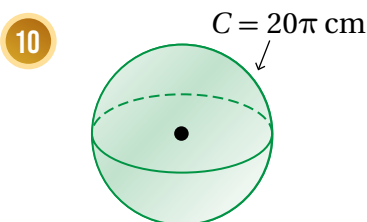
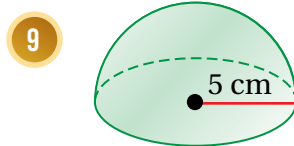
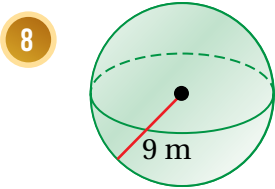
أجد طول قطر الكرة في كلّ من الحالات الآتية، مقرباً إجابتي لأقرب جزء من عشرة:

6 كرة حجمها 200 cm^3

5 كرة مساحة سطحها 200 cm^2

7 كرة حجمها 50 m^3

أجد حجم كلّ كرة أو نصف كرة ممّا يأتي، مقرباً إجابتي لأقرب عدد صحيح:



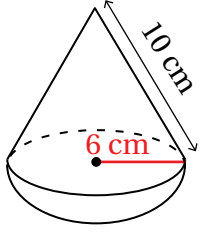
إرشاد

لإيجاد مساحة سطح نصف الكرة، لا أنسى إضافة مساحة الدائرة الكبرى.

إرشاد

لإيجاد طول نصف قطر الكرة في السؤالين 6 و 7 أحل المعادلة بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين.

الوحدة 8

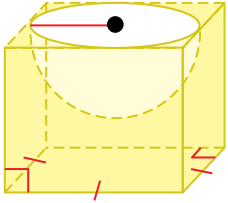


اللعاب: يتكوّن الجزء العلويّ من لعبة الغزل المجاورة من مخروط ونصف كرة. أجدُ بدلالة π :

حجم لعبة الغزل.

المساحة الكلية لسطح لعبة الغزل.

كرة معدنية طول نصف قطرها 15 cm، صهرت وأعيد تشكيلها لأسطوانة طول نصف قطرها 6 cm، أجد ارتفاع الأسطوانة.



مكعب طول ضلعه 5 cm يحتوي نصف كرة مفرغة طول نصف قطرها 2.5 cm، أجد حجم الجزء المتبقي من المكعب مقرباً إجابتي لأقرب عدد صحيح.

معلومة

تعدّ لعبة الغزل من أقدم الألعاب التي اكتشفها علماء الآثار، حيث يعود تاريخها إلى القرن الخامس والثلاثين قبل الميلاد.



مهارات التفكير العليا

تبرير: كرة طول نصف قطرها 5 cm، ومخروط طول نصف قطره 8 cm، إذا كان حجم الكرة وحجم المخروط متساويين، فأجد ارتفاع المخروط، مبرراً إجابتي.



تحذّر: تصنع شركة كرات صغيرة من الفولاذ المقاوم للصدأ (ستيل) لعجلات الأحذية طول قطر كل منها 4 mm، أجد عدد الكرات الصغيرة التي يمكن للشركة تصنيعها من 1 متراً مكعباً من (ستيل).



تحذّر: كرة طول قطرها 10 cm نُحِتَتْ من مكعب خشبي طول ضلعه 10 cm، أحسب النسبة المئوية لكمية الخشب المهدور.

أكتب: كيف أجد مساحة سطح كرة وحجمها إذا علمت طول نصف قطرها؟

اختبار الوحدة

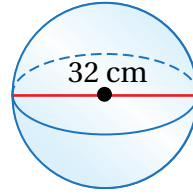
أختارُ رمزَ الإجابة الصحيحة لكلِّ ممَّا يأتي:

1 أحد الأشكال الآتية لا ينتج من تقاطع مكعب مع مستوى:

(a) المثلث (b) المستطيل

(c) النقطة (d) الدائرة

2 مساحة السطح التقريبية للكرة المجاورة تساوي:



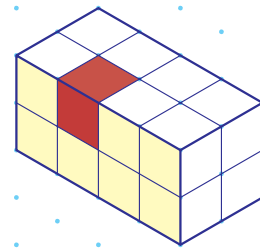
(a) 3217 cm^2 (b) 4287 cm^2
(c) 12861 cm^2 (d) 17149 cm^2

3 إذا كانت مساحة الدائرة الكبرى لكرة تساوي 33 cm^2 ، فإن مساحة سطح الكرة تساوي:

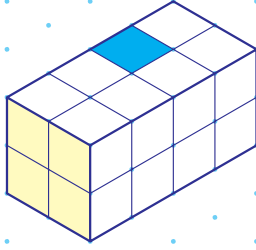
(a) 42 cm^2 (b) 132 cm^2
(c) 117 cm^2 (d) 264 cm^2

4 ما عدد مكعبات الوحدة التي يتكوّن منها الجسم أدناه؟

5 إذا أزيل المكعب الملوّن بالأحمر من الجسم، فأرسم الشكل الجديد على ورقة منقطة متساوية القياس.



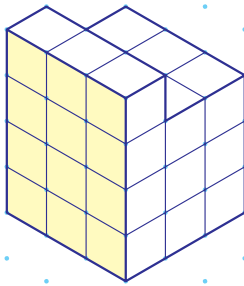
6 إذا وُضع مكعب وحدة فوق متوازي المستطيلات الآتي ليعطي المربع باللون الأزرق، فأرسم الشكل الجديد على ورقة منقطة متساوية القياس.



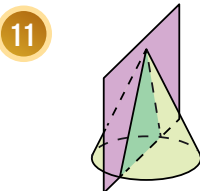
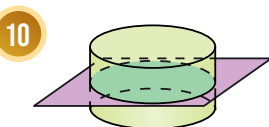
7 أرسم على ورقة منقطة متساوية القياس متوازي مستطيلات طوله 4 وحدات، وعرضه 4 وحدات، وارتفاعه 7 وحدات.

8 أرسم على ورقة منقطة متساوية القياس متوازي مستطيلات طوله 4 وحدات وعرضه وحدتان، وارتفاعه 6 وحدات.

9 أرسم المساقط: العلوي، والأمامي، والجانبّي، للجسم الآتي:



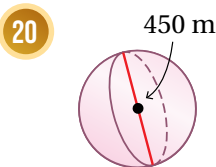
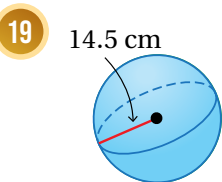
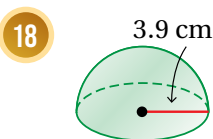
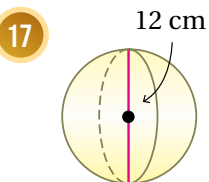
أحدّد المقطع الناتج من تقاطع المستوى والجسم في كلِّ ممَّا يأتي، وأحدّد أيُّ المقاطع هو مقطع عرضي:





16 أكمل رسم المجسم في الشكل المجاور، علماً بأن المستوى المظلل مستوى تماثل.

أجد مساحة سطح كل كرة أو نصف كرة مما يأتي، ثم أجد حجمها، وأقرب إجاباتي لأقرب جزء من مئة:



تدريب على الاختبارات الدولية

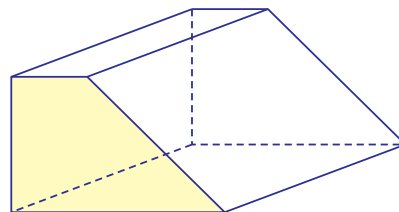
21 ما قطر الكرة التي مساحة سطحها $100\pi \text{ m}^2$ ؟

- a) 5 m b) 10 m
c) $5\pi \text{ m}$ d) $25\pi \text{ m}$

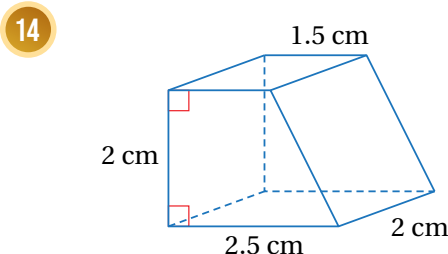
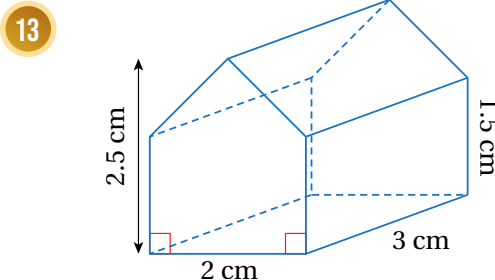
22 أي المجسمات الآتية له عدد لا نهائي من مستويات التماثل؟

- (a) هرم ثلاثي منتظم
(b) متوازي مستطيلات
(c) أسطوانة
(d) منشور سداسي منتظم

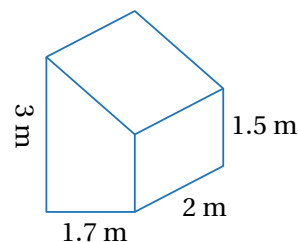
12 يبين الشكل الآتي منشورًا مقطوعه العرضي شبه منحرف، أحدد عدد مستويات تماثل المنشور.



أرسم المساقط: العلوي، والأمامي، والجانب، لكل من المجسمات الآتية: (أرسم كل مسقط بأبعاده الحقيقية)



15 أجد حجم المنشور الآتي:



الإحصاء والاحتمالات

ما أهمية هذه الوحدة؟

برزت أهمية الإحصاء والاحتمالات حديثاً بسبب الاعتماد المتزايد على الحواسيب في شتى مجالات الحياة، فنتج عن ذلك بيانات كبيرة نحتاج إلى تحليلها، وفهمها؛ لتتخذ قرارات صحيحة بناءً عليها. وسأتعلم في هذه الوحدة مهارات إحصائية كثيرة ستساعدني على اتخاذ قرارات صحيحة في حياتي.



سأتعلم في هذه الوحدة:

- تمثيل بيانات بالصندوق ذي العارضتين، وتفسيرها.
- اختيار التمثيل الأنسب لمجموعة من البيانات.
- إيجاد الفضاء العيني لتجربة عشوائية.
- إيجاد احتمال حادث مركب.

تعلمت سابقاً:

- ✓ إيجاد الوسيط والممدى لمجموعة من البيانات.
- ✓ تمثيل مجموعة من البيانات بالقطاعات الدائرية، والجدول التكرارية، والمخططات التكرارية، ومخططات الساق والورقة.
- ✓ إيجاد احتمال وقوع الحوادث.



مشروع الوحدة: جمع البيانات، وتحليلها

أستعدُّ ومجموعتي لتنفيذ مشروعِي الخاصِّ الَّذِي سنستعملُ فِيهِ ما سنتعلمُهُ فِي هَذِهِ الْوَحْدَةِ لجمع بياناتٍ، وتحليلها، وكتابة استنتاجاتٍ حولها.

خطوات تنفيذ المشروع:

1 أختارُ موضوعًا شائقًا، وأكتبُ ثلاثة أسئلةٍ إحصائيةٍ حولهُ تكونُ إجاباتها بياناتٍ عدديةً، وسؤالين إحصائيين تكونُ إجابتهما بياناتٍ نوعيةً. مثلاً، قَدْ يكونُ الموضوعُ (الحفاظُ على البيئة) أو (خطرُ التدخين).

2 أصمّمُ استبانةً بطريقةٍ جاذبةٍ، وأكتبُ فِيهَا الْأَسْئَلَةَ الإحصائيةَ الَّتِي أعددْتُها، ثُمَّ أَطبعُ 20 نسخةً مِنْهَا على الأقلِّ.

3 أطلبُ إلى 20 طالبًا / طالبةً فِي مدرستي الإجابةَ عَن فقراتِ الاستبانة.

4 أمثّلُ البياناتِ الَّتِي حصلتُ عَلَيْهَا مِنْ إجاباتِ كُلِّ سؤالٍ باستعمالِ إحدى طرائقِ تمثيلِ البياناتِ الَّتِي تعلمْتُها سابقًا، مبررًا اختيارَ كُلِّ تمثيلٍ.



5 أجدُ للبياناتِ العدديةِ الَّتِي حصلتُ عَلَيْهَا:

- مقاييسَ النزعةِ المركزيةِ (الوسط الحسابي، والوسيط، والمنوال).
- المدى، والرُّبَيعِيَّاتِ، والْمَدَى الرَّبَيعِيَّ.

6 أمثّلُ البياناتِ بالصُّندوقِ ذي العارضتين.

7 أحدّدُ الْقِيَمَ المتطرّفةَ لِكُلِّ مجموعةِ بياناتٍ (إن وُجدت).

8 أكتبُ استنتاجًا اعتمادًا على إجاباتِ الطلبةِ عَن كُلِّ سؤالٍ.

9 أصفُ حادثًا بسيطًا وحادثًا مركّبًا حولَ البياناتِ النوعيةِ الَّتِي حصلتُ عَلَيْهَا.

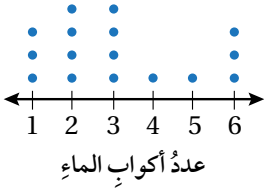
عرض النتائج:

• أكتبُ تقريرًا أضمُّهُ الْأَسْئَلَةَ الإحصائيةَ الَّتِي كتبتُها، بحيثُ يَلِي كُلَّ سؤالٍ التمثيلُ الإحصائيُّ للبياناتِ الَّتِي حصلتُ عَلَيْهَا مِنْ إجاباتِ السؤالِ، والاستنتاج الَّذِي وضعْتُهُ حولَ هَذِهِ البياناتِ.

• أضمّنُ التقريرَ مقاييسَ النزعةِ المركزيةِ، ومقاييسَ النشْتِ، والقِيَمَ المتطرّفةَ لِكُلِّ مجموعةِ بياناتٍ.

• أناقشُ مَعَ زملائي / زميلاتي صحّةَ الاستنتاجاتِ الَّتِي توصلْتُ إِلَيْهَا.

أَسْتَكَشِفُ



سألت هديلاً مجموعةً من طالبات صفّها عن عدد أكواب الماء التي تشربها كل واحدة منهن في اليوم، ومثلت ما حصلت عليه بالنقاط كما في الشكل المجاور:

(1) أجد وسيط هذه البيانات.

(2) أرتب البيانات في مجموعتين: مجموعة النصف الأعلى، ومجموعة

النصف الأدنى. ما عدد القيم في كل مجموعة؟

(3) أجد الوسيط لكل مجموعة.

(4) وضعت هديلاً الفرضية الآتية، هل الفرضية التي وضعتها هديلاً صحيحة؟

يشرب ربع مجموعة الطالبات كوباً ماءً أو أقل في اليوم.

فكرة الدرس

- أتعرف المدى الربيعي وعلاقته بتشتت البيانات.
- أمثل بيانات بالصندوق ذي العارضتين، وأفسرها.

المصطلحات

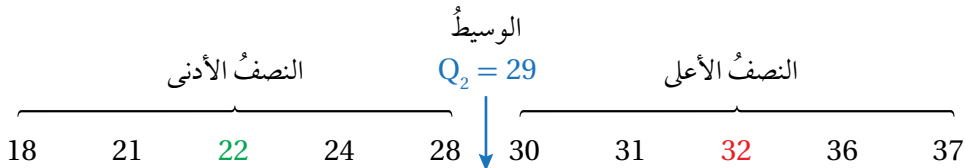
مقاييس التشتت، المدى، الربيعيات، المدى الربيعي، الربع الأدنى، الربع الأعلى، القيمة المتطرفة، الصندوق ذو العارضتين.

أتذكر

الوسط الحسابي والوسيط والمنوال هي مقاييس نزعة مركزية وتصف مركز البيانات بطرائق مختلفة.

تُستعمل مقاييس التشتت (measures of variation) لوصف مقدار تشتت البيانات وتباعدتها. ويُعدّ المدى (range) أحد مقاييس التشتت، وهو يساوي الفرق بين أكبر قيم البيانات وأصغرها، ويُرمز إليه بالرمز R.

الرَّبِيعِيَّاتُ (quartiles) قيم تقسم البيانات إلى أربع مجموعات متساوية تحوي كل منها ربع البيانات، إذ يقسم الوسيط البيانات إلى مجموعتين متساويتين.



وسيط النصف الأدنى من البيانات، ويسمى الربع الأدنى (lower quartile)، ويرمز إليه بالرمز Q_1 ، وربع البيانات يقل عنه أو يساويه.

وسيط النصف الأعلى من البيانات، ويسمى الربع الأعلى (upper quartile)، ويرمز إليه بالرمز Q_3 ، وربع البيانات يزيد عنه أو يساويه.

الوحدة 9

أستنتج مما سبق أن النصف الأوسط من البيانات يقع بين الربيعين: الأعلى، والأدنى، وهذا يقودنا إلى مقياس آخر من مقاييس التشتت هو **المدى الربيعي** (interquartile range) الذي يُرمز إليه بالرمز (IQR).

المدى الربيعي

مفهوم أساسي

• **بالكلمات:** المدى الربيعي هو مدى النصف الأوسط من البيانات، وهو الفرق بين الربيعين: الأعلى، والأدنى.

• **بالرموز:** $IQR = Q_3 - Q_1$

مثال 1: من الحياة

محافظات: يبين الجدول المجاور مساحات المحافظات الأردنية مقربة إلى أقرب جزء من عشرة.

أجد المدى.

الخطوة 1 أرتب البيانات تصاعديًا.

0.4, 0.4, 0.9, 1.1, 1.5, 2.2, 3.4, 4.7, 6.9, 7.5, 26.5, 32.8

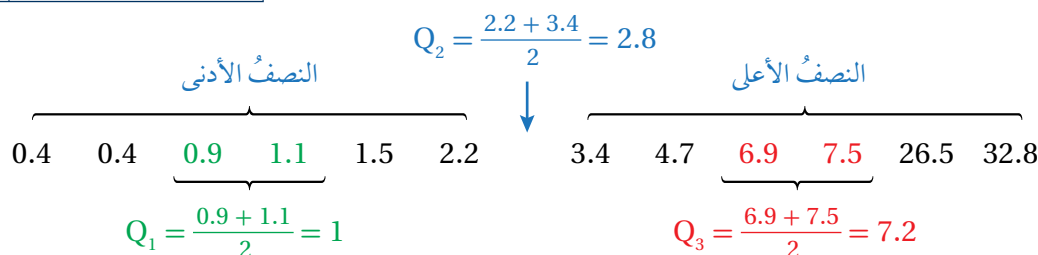
الخطوة 2 أجد المدى.

أكبر قيم البيانات 32.8 وأصغرها هي 0.4، إذن المدى هو:

$$R = 32.8 - 0.4 = 32.4$$

2 أجد المدى الربيعي (IQR).

المحافظة	المساحة (بآلاف الكيلومترات المربعة)
عجلون	0.4
عمّان	7.5
العقبة	6.9
البلقاء	1.1
إربد	1.5
جرش	0.4
الكرّك	3.4
معان	32.8
مأدبا	0.9
المفرق	26.5
الطفيلة	2.2
الزرقاء	4.7



$$IQR = Q_3 - Q_1 = 7.2 - 1 = 6.2$$

إذن، المدى الربيعي (IQR) للبيانات هو 6.2

3 أَسْتَعْمَلُ الْمَدَى وَالْمَدَى الرَّبِيعِيَّ لوصفِ البيانات.

مَدَى هَذِهِ الْبَيَانَاتِ 32.4 أَلْفَ كِيلُومِتْرٍ مَرِيعٍ، وَرُبْعُ مَحَافِظَاتِ الْمَمْلَكَةِ مِسَاحَاتُهَا أَلْفُ كِيلُومِتْرٍ مَرِيعٍ أَوْ أَقْلُ، وَرُبْعُ الْمَحَافِظَاتِ أَيْضًا مِسَاحَاتُهَا 7.2 أَلْفِ كِيلُومِتْرٍ مَرِيعٍ أَوْ أَكْثَرُ، وَتَتَرَاوَحُ مِسَاحَاتُ النِّصْفِ الْأَوْسَطِ مِنَ الْمَحَافِظَاتِ بَيْنَ أَلْفِ كِيلُومِتْرٍ مَرِيعٍ وَ 7.2 أَلْفِ كِيلُومِتْرٍ مَرِيعٍ، وَلَا تَتَجَاوَزُ الْفُرُوقُ بَيْنَ مِسَاحَاتِهَا 6.2 أَلْفِ كِيلُومِتْرٍ مَرِيعٍ.

✓ **أَتَحَقَّقُ مِنْ فَهْمِي:**

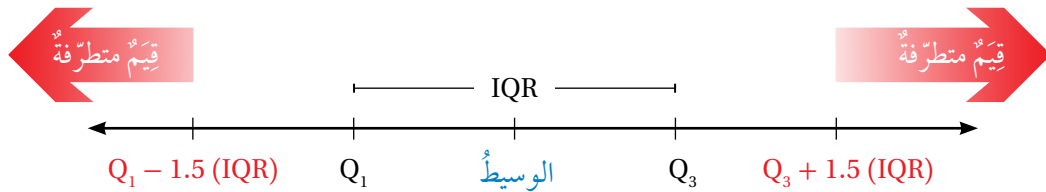
عدد النقاط				
64	61	67	59	60
58	57	71	56	62

يَبِينُ الْجَدْوَلُ الْمَجَاوِرُ عِدَدَ النِّقَاطِ الَّتِي سَجَّلَهَا فَرِيقُ كُرَةِ سَلَةٍ فِي أَحَدِ الْمَوَاسِمِ:

4 أجدُ الْمَدَى. 5 أجدُ الْمَدَى الرَّبِيعِيَّ.

6 أَسْتَعْمَلُ الْمَدَى وَالْمَدَى الرَّبِيعِيَّ لوصفِ البيانات.

القيمة المتطرفة (outlier) هِيَ قِيَمَةٌ أَكْبَرُ بِكَثِيرٍ أَوْ أَقْلُ بِكَثِيرٍ مِنْ قِيَمَةِ الْوَسِيطِ، وَتُعَدُّ أَيُّ قِيَمَةٍ تَقُلُّ عَنِ الْمَقْدَارِ $Q_1 - 1.5(IQR)$ أَوْ تَزِيدُ عَنِ الْمَقْدَارِ $Q_3 + 1.5(IQR)$ قِيَمَةً مُتَطَرِّفَةً.



مثال 2

السَّاقُ	الورقة
1	2 2 7
2	3 3 3 4 4 5 6 6 8 8 9
3	0 1 4 6
4	0 6

المفتاح: $1|2 = 12$

أجدُ الْقِيَمَ الْمُتَطَرِّفَةَ (إِنْ وَجَدْتُ) فِي الْبَيَانَاتِ الْمُمَثَّلَةِ بِمُخَطَّطِ السَّاقِ وَالْوَرَقَةِ الْمَجَاوِرِ.

1 **الخطوة** أجدُ الرَّبِيعِيَّاتِ.

السَّاقُ	الورقة
1	2 2 7
2	3 3 3 4 4 5 6 6 8 8 9
3	0 1 4 6
4	0 6

المفتاح: $1|2 = 12$

أَسْتَعْمَلُ الْأَقْوَامَ لِتَحْدِيدِ النِّصْفِ الْعُلُويِّ وَالسُّفْلِيِّ مِنَ الْقِيَمِ، ثُمَّ أَحَدُّ الْقِيَمَ الْلازِمَةَ لِإِيْجَادِ الرَّبِيعِيَّاتِ.

$$Q_1 = \frac{23 + 23}{2} = 23$$

$$Q_3 = \frac{30 + 31}{2} = 30.5$$

الوحدة 9

الخطوة 2 أجد المدى الربيعي.

$$IQR = Q_3 - Q_1 = 30.5 - 23 = 7.5$$

الخطوة 3 أحدد القيم المتطرفة (إن وجدت).

$$Q_1 - 1.5(IQR) = 23 - 1.5(7.5) = 11.75$$

$$Q_3 + 1.5(IQR) = 30.5 + 1.5(7.5) = 41.75$$

بما أن البيانات لا تحتوي قيمة أقل من 11.75، لكنها تحتوي القيمة 46 وهي أكبر من 41.75، إذن القيمة المتطرفة الوحيدة هي 46

أتحقق من فهمي:



أجد القيم المتطرفة (إن وجدت) للبيانات الممثلة بمخطط الساق والورقة المجاور.

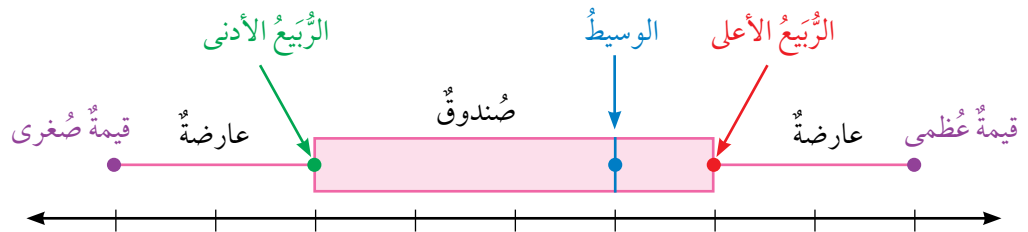
الساق	الورقة
5	3 6 8
6	5 8
7	0 3 7 7 9
8	1 4 8 8 9
9	9

المفتاح: 5|3 = 53

يُستعمل الصندوق ذو العارضتين (box-and-whisker plot) لتمثيل البيانات باستعمال القيمتين العظمى والصغرى وربيعات البيانات.

أنعام

يُستعمل الصندوق ذو العارضتين لتحديد مدى انتشار (تباين) البيانات.



مثال 3: من الحياة



برتقال: أستخدم الصندوق ذو العارضتين لتمثيل عدد صناديق البرتقال التي أنتجتها مزرعة خلال 9 سنوات:

572, 452, 457, 460, 360, 407, 380, 458, 264

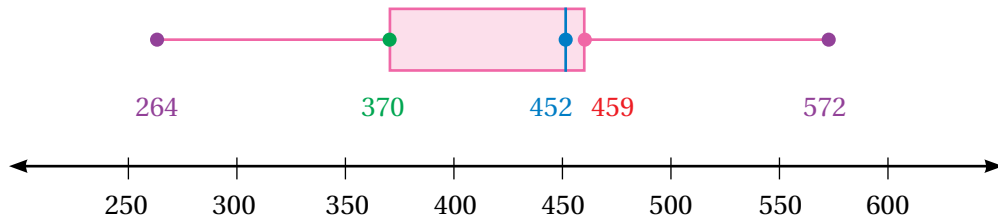


الخطوة 1 أرّتب البيانات تصاعديًا، وأجد الوسيط، والرّبعيّات، والقيمتين: العظمى، والصّغرى:



الخطوة 2 أرسم خطّ أعداد، وأعيّن عليه نقاطًا تمثّل كلّاً من: القيمتين العظمى والصّغرى، والوسيط، والرّبع الأدنى، والرّبع الأعلى.

الخطوة 3 أرسم صندوقًا باستعمال الرّبعيّات، ثمّ أرسم خطًّا رأسّيًّا داخل الصندوق يمرّ بالوسيط، ثمّ أرسم العارضتين من الصندوق إلى القيمتين: العظمى، والصّغرى.

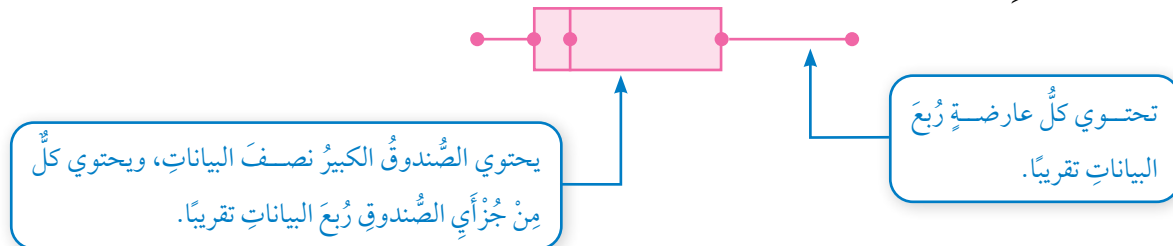


أتحقق من فهمي:

أستعمل الصندوق ذا العارضتين لتمثيل البيانات الآتية التي تمثّل أعمار المعلمين في إحدى المدارس:

30, 52, 26, 35, 45, 22, 49, 32, 28, 50, 42, 35

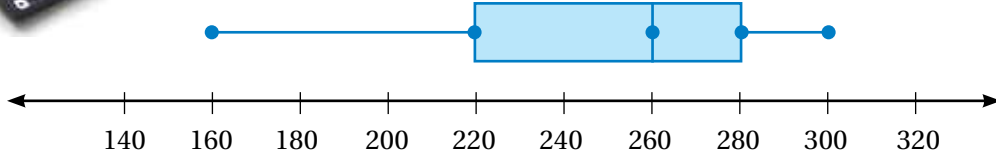
يقسّم الصندوق ذو العارضتين البيانات إلى أربعة أجزاء: جزأي الصندوق، والعارضتين. ويحتوي كلّ جزءٍ من الأجزاء الأربعة العدد نفسه من القيم تقريبًا.



تدلّ أطوال أجزاء مخطّط الصندوق ذي العارضتين على مقدار تشتت البيانات، فكلّما زاد طول الصندوق أو طول عارضتيه ازدادت البيانات انتشارًا وتباعدًا.



أقراص تخزين: يبين الصندوق ذو العارضتين أدناه سعة تخزين مجموعة من الأقراص الصلبة بوحدة الجيجابايت:



1 أصف توزيع البيانات.

بما أن كل عارضة تمثل ربع البيانات، ويمثل الصندوق نصف البيانات، إذن:

- تتراوح سعة ربع الأقراص الصلبة بين 160 و 220 جيجابايتًا.
- تتراوح سعة نصف الأقراص الصلبة بين 220 و 280 جيجابايتًا.
- تتراوح سعة ربع الأقراص بين 280 و 300 جيجابايت.

2 أجد المدى الربيعي للبيانات.

$$IQR = Q_3 - Q_1 = 280 - 220 = 60$$

إذن، المدى الربيعي 60 جيجابايتًا، وهذا يعني أن النصف الأوسط من أقراص التخزين لا تتجاوز الفروق بين ساعاتها 60 جيجابايتًا.

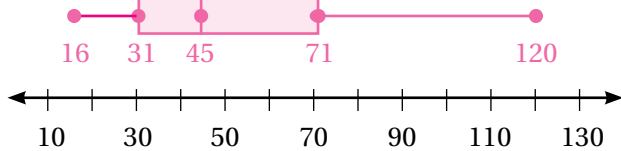
3 هل البيانات أكثر تشتتًا أسفل الربع الأدنى أم فوق الربع الأعلى؟ أبرر إجابتي.

بما أن العارضة السفلى أطول من العارضة العليا، فهذا يعني أن البيانات أسفل الربع الأدنى أكثر تشتتًا من البيانات فوق الربع الأعلى.

✓ **أتحقق من فهمي:**

ساعات: يبين تمثيل الصندوق ذي العارضتين المجاور

أسعار الساعات في أحد المحال.



4 أصف توزيع البيانات.

5 أجد المدى الربيعي للبيانات.

6 هل البيانات أكثر تشتتًا أسفل الربع الأدنى أم فوق الربع الأعلى؟ أبرر إجابتي.

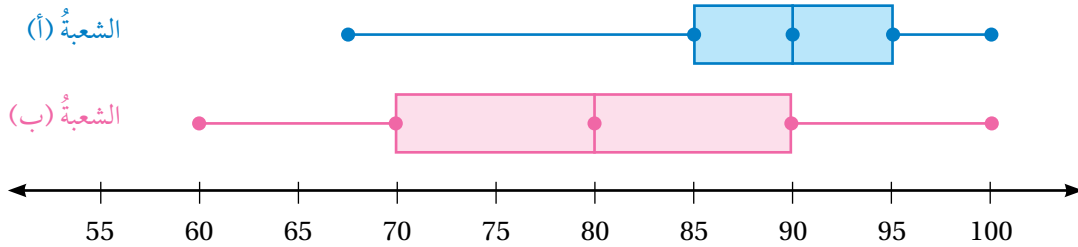
يمكن استعمال الصندوق ذي العارضتين المزدوج للمقارنة بين مجموعتي بيانات.

مثال 5: من الحياة



علامات: يبين تمثيل الصندوق ذي العارضتين المزدوج أدناه علامات طلبة الصف الثامن في مادة الرياضيات في الشعبتين (أ) و (ب) في إحدى المدارس:

أي الشعبتين علامات الطلبة فيها أكثر تشتتاً؟ أبرر إجابتي.



ألاحظ أن المدى والمدى الربيعي لعلامات الطلبة في الشعبة (ب) أكبر من المدى والمدى الربيعي في الشعبة (أ)، ومنه فإن علامات الطلبة في الشعبة (ب) أكثر تشتتاً.

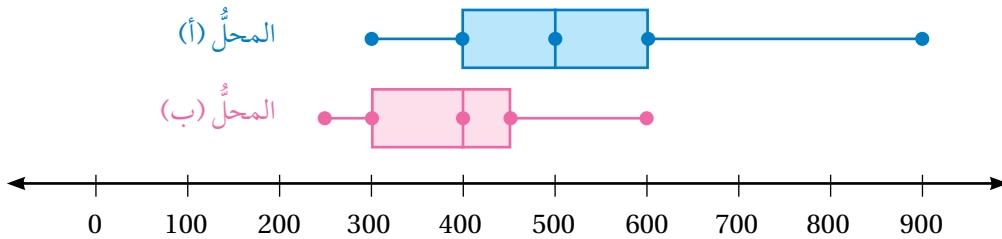
أي الشعبتين علامات الطلبة فيها أفضل؟ أبرر إجابتي.

علامات الطلبة أفضل في الشعبة (أ)؛ لأن نصف الطلبة حصلوا على علامة 90 فأكثر، في حين أن ربع الطلبة فقط في الشعبة (ب) حصلوا على علامة 90 فأكثر.

أتتحقق من فهمي:



هواتف: يبين تمثيل الصندوق ذي العارضتين المزدوج أدناه أسعار الهواتف النقالة في المحلّين (أ) و (ب):



أي المحلّين أسعار الهواتف فيه أكثر تشتتاً؟ أبرر إجابتي.

أي المحلّين أسعار الهواتف فيه أعلى؟ أبرر إجابتي.

الوحدة 9



أجد المَدَى والرُّبُوعِيَّاتِ والمَدَى الرَّبُوعِيَّ لِكُلِّ مَجْمُوعَةٍ بَيَانَاتٍ مِمَّا يَأْتِي:

1 85, 77, 58, 69, 62, 73, 55, 82, 67, 77, 59, 92, 75

2 28, 42, 37, 31, 34, 29, 44, 28, 38, 40, 39, 42, 30

السَّاقُ	الورقةُ
19	3 5 5
20	2 2 5 8
21	5 8 8 9 9 9
22	0 1 7 8 9
23	2

المفتاحُ: $19|3 = 193$

السَّاقُ	الورقةُ
5	0 3 7 9
6	1 3 4 5 5 6
7	1 5 6 6 9
8	1 2 3 5 8
9	2 5 6 9
10	
11	7

المفتاحُ: $5|0 = 5.0$

أجد القِيَمَ المتطَرِّفَةَ (إِنْ وُجِدَتْ) لِكُلِّ مَجْمُوعَةٍ بَيَانَاتٍ مِمَّا يَأْتِي:

5 52, 40, 49, 48, 62, 54, 44, 58, 39

6 133, 117, 152, 127, 168, 146, 174

7 4.8, 5.5, 4.2, 8.9, 3.4, 7.5, 1.6, 3.8

معلومة

تؤثِّرُ 4 قُوَى مُخْتَلِفَةٍ فِي تَحْلِيْقِ الطَّائِرَةِ الْوَرَقِيَّةِ، وَهِيَ قُوَى: الدَّفْعِ، وَالرَّفْعِ، وَالْجَاذِبِيَّةِ، وَالسَّحْبِ؛ لِذَا تُخْتَارُ الْمَوَادُّ الْخَفِيفَةُ لِتَقَاوَمِ الطَّائِرَةِ الْجَاذِبِيَّةِ وَتَحَلُّقِ بِسَهُولَةٍ.

8

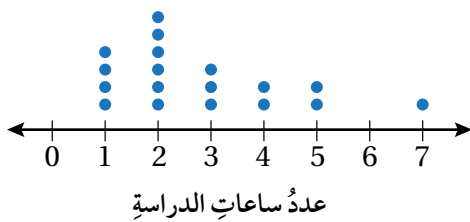
طائرة ورقية: يبيِّنُ الجدولُ المجاورُ

مُدَّةَ تَحْلِيْقِ عِدَدٍ مِنَ الطَّائِرَاتِ الْوَرَقِيَّةِ بِالْدَّقَائِقِ. أَجَدُ الْمَدَى وَالْمَدَى الرَّبُوعِيَّ لِلْبَيَانَاتِ، ثُمَّ أَمَثَلَهَا بِالصُّنْدُوقِ ذِي الْعَارِضَتَيْنِ.

9

يبيِّنُ التَّمْثِيلُ بِالنِّقَاطِ الْمَجَاوِرُ عِدَدَ السَّاعَاتِ الَّتِي يَقْضِيهَا بَعْضُ الطَّلَبَةِ فِي الدِّرَاسَةِ لِلْامْتِحَانِ. أَمَثَلُ الْبَيَانَاتِ بِالصُّنْدُوقِ ذِي الْعَارِضَتَيْنِ.

مُدَّةُ التَحْلِيْقِ (min)			
$13\frac{1}{2}$	$21\frac{1}{2}$	21	$16\frac{3}{4}$
$10\frac{1}{4}$	19	32	$26\frac{1}{2}$
29	$16\frac{1}{4}$	$28\frac{1}{2}$	$18\frac{1}{2}$



معلومة

يُعَدُّ الفهدُ الصيَّادُ مِنْ
أَسْرَعَ الحَيَوَانَاتِ،
وَيُمْكِنُ أَنْ تَبْلُغَ سُرْعَتُهُ
110 km/h خِلَالَ
3 ثَوَانٍ مِنْ انْطِلَاقِهِ.



الحيوان	السرعة (km/h)
الفهدُ الصيَّادُ	100
النمرُ	58
القطَّةُ	48
الفيلُ	40
الفأرُ	13
العنكبوتُ	2

أمثِّلُ البياناتِ بالصُّندوقِ ذي العارضَتَيْنِ.

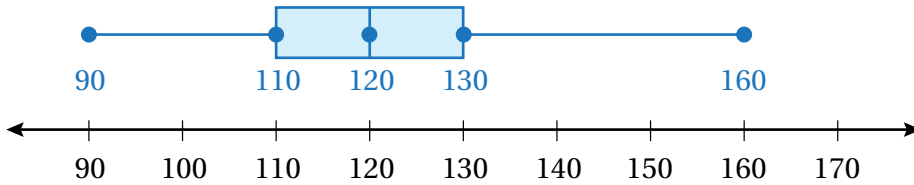
أجدُ المَدَى الرَّبِيعِيَّ للبياناتِ.

أجدُ القِيَمَ المتطرِّفةَ (إنْ وَجَدْتُ).

أصِفُ توزِيعَ البياناتِ.

أصِفُ كيفَ يدلُّ شَكْلُ الصُّندوقِ ذي العارضَتَيْنِ عَلَى القِيَمِ المتطرِّفةِ فِي البياناتِ.

أفلامٌ: يبيِّنُ تمثِيلُ الصُّندوقِ ذي العارضَتَيْنِ أَدْنَاهُ مَدَّةَ عَرَضِ مَجْمُوعَةٍ مِنَ الأفلامِ
بالدقائق:



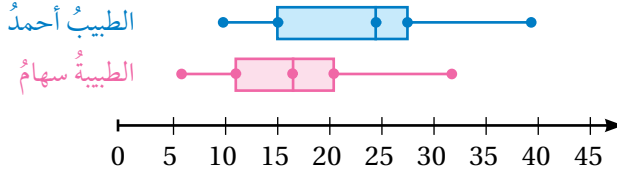
ما نِسْبَةُ الأفلامِ الَّتِي تَزِيدُ مَدَّةَ عَرَضِهَا عَلَى 120 دَقِيقَةً.

هَلِ الْبَيَانَاتُ أَكْثَرُ تَشَتُّبًا أَسْفَلَ الرَّبِيعِ الْأَدْنَى أَمْ فَوْقَ الرَّبِيعِ الْأَعْلَى؟ أَبْرِّرْ إِجَابَتِي.

أجدُ المَدَى الرَّبِيعِيَّ للبياناتِ.

الوحدة 9

يبيّن تمثيل الصندوق ذي العارضتين المزدوج أدناه مدة انتظار المرضى عند طبيبي الأسنان: أحمد، وسهام.



18 أجد المدى الربيعي لمدة انتظار المرضى عند الطبيبة سهام.

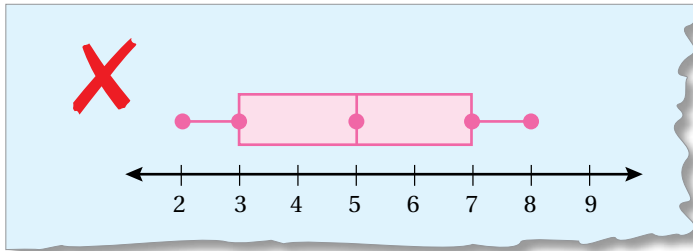
19 أجد المدى الربيعي لمدة انتظار المرضى عند الطبيب أحمد.

20 يرغب أنور بمراجعة أحد الطبيبين، أيُّهما أنصحهُ بزيارته؟ أبرّر إجابتي.

مهارات التفكير العليا

21 **أكتشف الخطأ:** ورد في التمثيل بالصندوق ذي العارضتين الآتي خطأ، أكتشفهُ،

وأصحّهُ. علماً أنّ التمثيل للقيم: 2, 6, 3, 3, 7, 4, 6, 9, 6, 8, 5, 8



22 **مسألة مفتوحة:** أكتب مجموعة من البيانات قيمة المدى الربيعي لها 15 وتحتوي

قيمتين متطرفتين.

23 **مسألة مفتوحة:** أكتب مجموعة من البيانات عندما أمثلها بالصندوق ذي العارضتين

يكون طول كل من الصندوق والعارضتين متساوياً، مبرراً كيفية اختيار القيم.

24 **أكتب** كيف أمثل بيانات باستعمال الصندوق ذي العارضتين؟

أستكشف

الطلاب	نسبة
المرشحات	الأصوات
سمر	43%
آلاء	28%
ريم	29%

يبيّن الجدول المجاور نسبة الأصوات التي حصلت عليها طالبات الصف الثامن المرشحات للبرلمان الطلابي. أيهما أفضل لتمثيل هذه البيانات: الأعمدة البيانية، أم القطاعات الدائرية؟ أبرّر إجابتني.

فكرة الدرس

- اختيار التمثيل الأنسب لبيانات معطاة.
- أكتب استدلالاً حول بيانات ممثلة.

المصطلحات

البيانات العددية، البيانات النوعية، الاستدلال.

البيانات العددية (numerical data) هي بيانات يمكن رصدها على صورة أرقام، وأيضاً يمكن قياسها وإجراء العمليات الحسابية عليها، وترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً، مثل: الكتلة، والطول، ودرجة الحرارة. أما **البيانات النوعية** (categorical data) فهي بيانات غير رقمية يمكن ملاحظتها ولا يمكن قياسها، مثل: لون العيون، وأنواع الحيوانات، ومكان الولادة. وعند تمثيل البيانات يجب تحديد ما إذا كانت عددية أم نوعية؛ لتحديد التمثيل الأنسب.

اختيار التمثيل الأنسب

مفهوم أساسي

يُستعمل لتمثيل البيانات النوعية.

التمثيل بالصُور



يُستعمل لتمثيل البيانات النوعية والمقارنة بين فئاتها.

الأعمدة البيانية



يُستعمل لتمثيل البيانات العددية التي تتغير مع الزمن.

الخطوط البيانية



يُستعمل لتمثيل البيانات النوعية حين يكون الهدف من التمثيل مقارنة الجزء بالكل.

القطاعات الدائرية



يُستعمل لتمثيل البيانات العددية بحيث تظهر القيم جميعها في التمثيل.

الساق والورقة



يُستعمل لتمثيل البيانات النوعية، وإظهار عدد مرات تكرار كل قيمة في مجموعة البيانات.

التمثيل بالنقاط



يُستعمل لتمثيل البيانات العددية لدراسة مقدار تشتت البيانات وتباعدتها.

الصندوق ذو العارضتين



يُستعمل لتمثيل البيانات العددية المنظمة في فترات ذات تكرارات.

المخطط التكراري



مثال 1

أختار تمثيلاً مناسباً لكل ممّا يأتي، مبرراً إجابتي:

- 1 عدد الطلبة في مسابقة حفظ الأحاديث النبوية الشريفة كلّ عام.
بما أن البيانات عددية تتغير مع الزمن، فإن التمثيل بالخطوط البيانية هو الاختيار الأنسب لتمثيلها.
- 2 الرياضة الأكثر تفضيلاً لطلبة الصف الثامن.
بما أن البيانات نوعية وتتعلق بجزء من كلّ، فإن التمثيل بالقطاعات الدائرية هو الاختيار الأنسب لتمثيلها.
- 3 توزيع عدد سكّان المملكة الأردنية الهاشمية بحسب الفئات العمرية.
بما أن البيانات عددية موزعة على فئات، فإن التمثيل بالمخطط التكراري هو الاختيار الأنسب لتمثيلها.






أتحقّق من فهمي:

- 4 عدد ساعات الدراسة لطلبة الصف الثامن في إحدى المدارس.
- 5 المسافة التي يقطعها أحمد بسيارته كلّ شهر.
- 6 توزيع دخل الأسرة على المتطلبات المنزلية.

الاستدلال (inference) هو عبارة يمكن التوصل إليها من تحليل بيانات تمّ جمعها حول الظاهرة أو الموضوع قيد الدراسة، ويفضّل استعمال لغة احتمالية للتعبير عن الاستدلال؛ لأن النتيجة توضع بناءً على عيّنة صغيرة من المجتمع.

مثال 2

يبين التمثيل بالصور المجاور عدد الأشخاص الذين ارتادوا النادي الرياضي في 5 أيام متتالية.

السبت	
الأحد	
الاثنين	
الثلاثاء	
الأربعاء	
المفتاح: كلُّ تدلُّ على 10 أشخاص.	

- 1 ما عدد الأشخاص الذين ارتادوا النادي الرياضي يوم السبت؟
بما أن كلّ صورة تعبّر عن 10 أشخاص، وبما أنه توجد 7 صور مقابل يوم السبت، إذن فإن عدد الأشخاص الذين ارتادوا النادي يوم السبت 70 شخصاً.

2

أجد الوسط الحسابي لعدد الأشخاص الذين ارتادوا النادي يومي الأحد والإثنين.

عدد الأشخاص الذين ارتادوا النادي يوم الأحد 45 شخصًا، وعدددهم يوم الإثنين 35 شخصًا.

إذن، الوسط الحسابي لعدد الأشخاص يومي الأحد والإثنين هو:

$$\bar{x} = \frac{45 + 35}{2} = \frac{80}{2} = 40$$

أجمع القيم، وأقسمها على عددها، وأبسط

3

أكتب استدلالًا حول موعد ذهاب الأشخاص إلى النادي، معتمدًا

على التمثيل:

يظهر من التمثيل أن أكبر عدد من الأشخاص يرتادون النادي الرياضي

يوم السبت، ويستمر عددهم بالانخفاض وصولًا إلى يوم الأربعاء،

ومنهُ يمكنني كتابة استدلالٍ يحتوي كلمات احتمالية كما يلي:

من المتوقع أن عدد الأشخاص الذين يرتادون النادي الرياضي يقل

مع مضي أيام الأسبوع ابتداءً من يوم السبت.

السبت	👤👤👤👤👤👤
الأحد	👤👤👤👤
الاثنين	👤👤👤
الثلاثاء	👤👤
الأربعاء	👤
المفتاح: كل 👤 تدلُّ على 10 أشخاص.	

عدد الأشخاص
يقُلُّ كل يوم

المشي	👤👤👤
السيارة	👤👤👤👤👤
الحافلة	👤👤👤
الدراجة	👤
المفتاح: كل 👤 يمثل طالبين.	

أتحقق من فهمي:

يبين التمثيل بالصور المجاور وسيلة النقل التي يستعملها مجموعة

من الطلبة للوصول إلى المدرسة. أكتب استدلالًا حول كيفية وصول

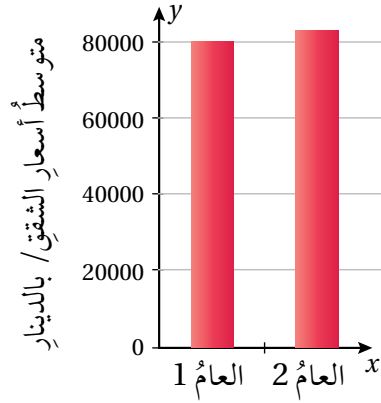
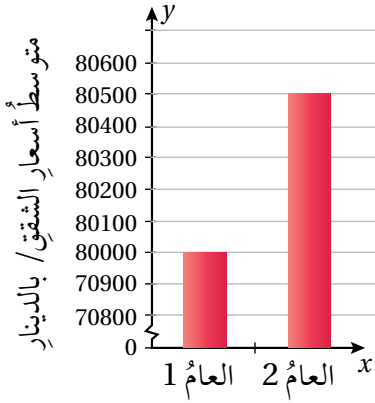
الطلبة إلى المدرسة معتمدًا على التمثيل.

تعلمت في المثال السابق أنه يمكن التوصل إلى استدلالات بتحليل بيانات ممثلة، ولكن في بعض الأحيان تكون التمثيلات

مضللة، مما يؤدي إلى التوصل إلى استدلالات غير صحيحة. ومن هذه التمثيلات المضللة استعمال تدرّيج غير مكتمل على

المحور الرأسي (محور y).

يبيّن التمثيلان الآتيان متوسط أسعار الشقق السكنية في عامين متتاليين. أيّ التمثيلين مضللّ؟ أبرّر إجابتني.



أنتعلم

تدلّ العلامة \hookrightarrow على أنّ التدرّج على المحور y غير مكتمل.

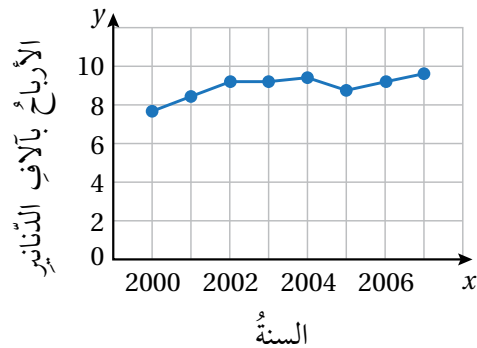
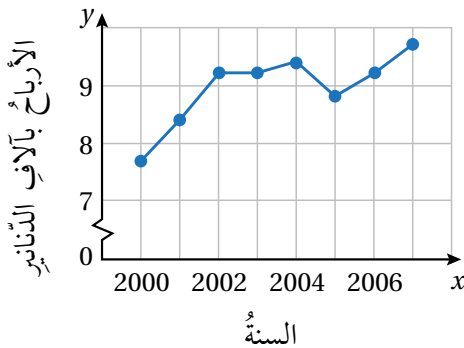
يُظهر التمثيل بالأعمدة جهة اليسار أنّ متوسط أسعار الشقق في العام 2 زاد بما يقارب ثلاثة أمثال متوسط أسعار الشقق عنه في العام 1، لأنّ التدرّج على محوره الرأسيّ غير مكتمل، في حين أنّ متوسط أسعار الشقق زاد بمقدار 500 دينار فقط. أمّا التمثيل بالأعمدة جهة اليمين فلا يُظهر فرقاً كبيراً بين العامين في متوسط أسعار الشقق؛ لأنّ التدرّج على محوره الرأسيّ مكتمل.

إذن، التمثيل بالأعمدة جهة اليسار مضللّ.

أتتحقّق من فهمي:

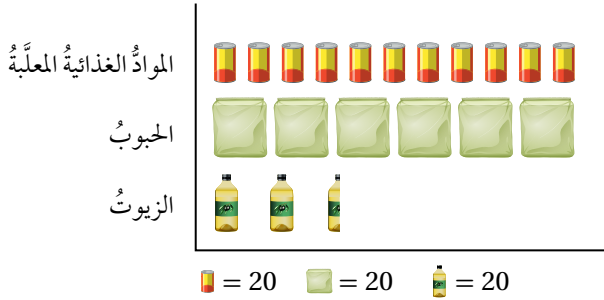


يبيّن التمثيلان الآتيان أرباح إحدى الشركات بالآلاف الدنانير. أيّ التمثيلين مضللّ؟ أبرّر إجابتني.



مثال 4

التبرعات من المواد الغذائية



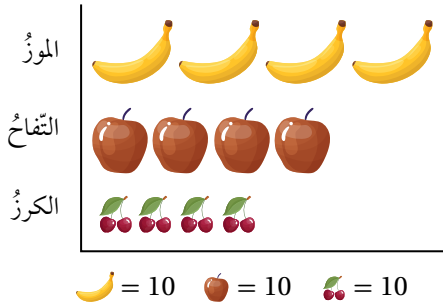
بالاعتماد على التمثيل بالصور المجاور، استدل همام أن عدد علب المواد الغذائية المتبرع بها وعدد علب الحبوب تقريباً متساو. هل استدلال همام دقيق؟ أبرر إجابتي.

تمثل كل صورة العدد نفسه من الأشياء، ولكن لأن حجم الصورة المستعملة للتعبير عن الحبوب أكبر من حجم الصورة المستعملة للتعبير عن المواد الغذائية المعلبة، يظهر أن العدد من النوعين تقريباً متساو، في حين أن عدد علب الحبوب نصف عدد علب المعلبات.

تحقق من فهمي:



الفاكهة المفضلة



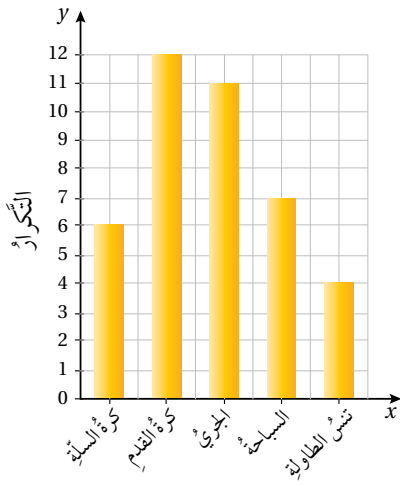
بالاعتماد على التمثيل بالصور المجاور، استدلت هناء أن عدد الأشخاص الذين يفضلون الموز تقريباً ضعف عدد الأشخاص الذين يفضلون الكرز. هل استدلال هناء دقيق؟ أبرر إجابتي.

أدرب وأحل المسائل

أختار تمثيلاً مناسباً لكل مما يأتي، مبرراً إجابتي:

- 1 ارتفاعات الأشجار الحرجية.
- 2 إجابات مجموعة من الطلبة عن سؤالٍ إجابته (نعم أو لا).
- 3 عدد الأهداف التي سجلها كل عضو في فريق كرة قدم.
- 4 الأرباح التي يحققها ريان من مشروعهِ الصغير كل سنة.
- 5 نتائج اختبار اللغة العربية لأحد الصفوف.
- 6 أعداد المصابين بفيروس كورونا وفقاً للفئات العمرية المختلفة.

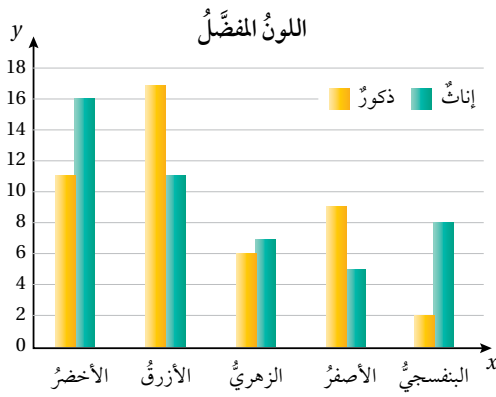
الوحدة 9



صمّم عليّ استبانة سأل فيها 40 طالباً من طلبة مدرسته عن الرياضة المفضّلة لديهم، ومثّل النتائج التي حصل عليها بالأعمدة كما في الشكل المجاور:

أي الرياضات هي الأكثر تفضيلاً عند الطلبة؟

يقول عليّ: (أتوقّع من التمثيل بالأعمدة أن تنس الطاولة هي الرياضة الأقل تفضيلاً لدى طلبة الأردن). هل استدلال عليّ صحيح؟ أبرّر إجابتي.



قرّرت إدارة إحدى المدارس استطلاع آراء طلبة الصف الأول الموزعين على ثلاث شعب عن اللون الذي يفضّلونه لطلاء الغرف الصفية. جمعت الإدارة نتائج الاستطلاع، ومثّلتها بالأعمدة المزدوجة كما في الشكل المجاور:

أكمل الجملة الآتية:

عدد الذين أكبر من

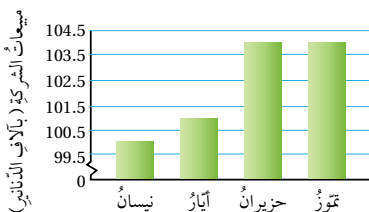
اعتماداً على التمثيل، أي الألوان ستختارها المدرسة لطلاء الغرف الصفية؟ أبرّر إجابتي.

أبين لم تعد كل من التمثيلات الآتية مضللة:

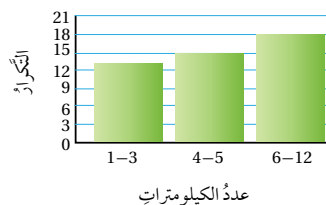
أفكر

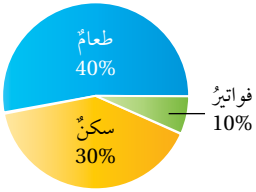
أكتب استدلالاً حول اللون الذي يفضّله الطلبة لطلاء الغرف الصفية.

11



12





يبيّن التمثيل بالقطاعات الدائرية المجاور توزيع دخل الأسرة الشهري على المتطلبات المنزلية:

لِمَ يُعَدُّ هذا التمثيل مضللاً؟

اقترح تعديلاً للتمثيل المجاور، مبرراً إجابتي.

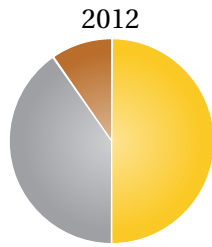
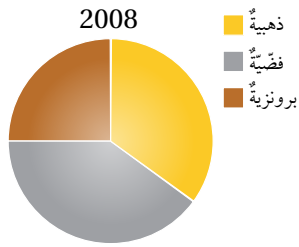


تبرير: يبيّن التمثيل بالقطاعات الدائرية المجاور أنواع المركبات التي مرّت أمام منزلٍ زيادٍ في إحدى ساعات النهار:

أجد النسبة المئوية للسيارات التي مرّت خلال هذه الساعة.

يقول زياد: إن ربع المركبات التي مرّت من الشارع هي حافلات أو شاحنات. هل أنفق مع قول زياد؟ أبرر إجابتي.

يقول زياد: إن نصف عدد الأشخاص الذين مروا من الشارع كانوا يركبون السيارات. هل ما يقوله زياد صحيح؟ أبرر إجابتي.



تبرير: يبيّن التمثيل بالقطاعات الدائرية المجاور أنواع الميداليات التي فازت بها إحدى الدول في دورتين متتاليتين من الألعاب الأولمبية. أكتب استدلالاً بالاعتماد على التمثيل.

تحذّر: ما المعلومات التي يمكنني الحصول عليها من تمثيل البيانات بالصندوق ذي العارضتين ولا يمكنني الحصول عليها من تمثيلها بالمخطط التكراري؟ أبرر إجابتي.

أكتب: كيف أحدد التمثيل الأنسب لتمثيل بيانات معطاة؟

مهارات التفكير العليا

أفكّر

هل يركب العدد نفسه من الأشخاص كل نوع من المركبات؟

أستكشف

فكرة الدرس

أحدّد نواتج الفضاء العينيّ وعددها.

المصطلحات

النواتج، الحادث، الفضاء العينيّ، مخطط الشجرة، مخطط الاحتمال.



ترغبُ شذى باختيار أحد التخصصات الجامعية: دكتورُ صيدلة، هندسة حاسوب، هندسة ميكانيكية، إما في الجامعة الأردنية أو في جامعة العلوم والتكنولوجيا الأردنية. كم خياراً أمام شذى لاختيار التخصص والجامعة؟

أتذكر

التجربة العشوائية تجربة نستطيع أن نتنبأ فيها بالنواتج جميعها التي يمكن أن تظهر قبل إجرائها، لكننا لا نعلم تحديداً أيها سيظهر حتى نُجري التجربة.

تُسمى الخيارات المحتملة لتجربة عشوائية ما **النواتج** (outcomes)، فمثلاً توجد 6 نواتج محتملة لتجربة رمي حجرٍ نردٍ هي: 1, 2, 3, 4, 5, 6

أما **الحادث** (event) فهو ناتج واحد أو أكثر من نواتج التجربة العشوائية، مثل ظهور عدد زوجي في تجربة رمي حجرٍ النرد.

تُسمى جميع النواتج الممكنة للتجربة العشوائية **الفضاء العينيّ** (sample space)، ويمكن استعمال طرائق عدة لإيجاده، منها **مخطط الشجرة** (tree diagram).

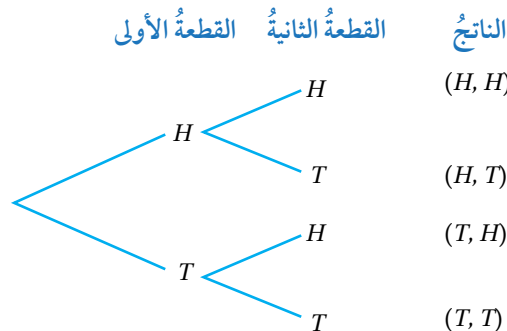
مثال 1



أستعمل مخطط الشجرة لتحديد الفضاء العينيّ لتجربة رمي قطعتي نقدٍ منتظمين مرةً واحدةً عشوائياً. لقطعة النقد وجهان، أحدهما يحتوي صورة، والآخر كتابة؛ لذا أرمز إلى الوجه الذي يحتوي الصورة بالرمز (H) وإلى الوجه الذي يحتوي الكتابة بالرمز (T).

أتذكر

أرمز إلى الصورة بالحرف H، وإلى الكتابة بالحرف T، وهما الحرفان الأولان من الكلمتين الإنجليزيّتين Head، و Tail.



ألاحظُ من مخططِ الشجرة أنَّ لهذه التجربة 4 نواتجٍ ممكنة؛ لذا فإنَّ الفضاءَ العينيَّ هو:

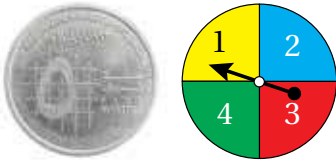
$$(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)$$

أتتحقق من فهمي:

أستعملُ مخططَ الشجرة لتحديد الفضاءِ العينيِّ لتجربة رمي قطعة نقدٍ وحجرٍ نردٍ مرةً واحدةً عشوائيًا.

يمكنُ أيضًا استعمالُ الجدولِ لإيجادِ الفضاءِ العينيِّ للتجاربِ العشوائية.

مثال 2



أستعملُ الجدولَ لتحديد الفضاءِ العينيِّ لتجربة رمي قطعة نقدٍ مرةً واحدةً عشوائيًا وتدوير مؤشر قرصٍ عشوائيًا مقسمٍ إلى 4 قطاعاتٍ متطابقةٍ كُتبت عليها الأرقام 1, 2, 3, 4

أرسمُ جدولًا، وأسجِّلُ في الصفِّ الأعلى مِنْهُ نواتجَ تدوير مؤشر القرصِ المرقَّم، وفي العمودِ إلى اليسارِ نواتجَ إلقاء قطعة النقد، ثُمَّ أملأُ الجدولَ.

		القرصُ المرقَّم			
		1	2	3	4
قطعةُ النقدِ	H	H, 1	H, 2	H, 3	H, 4
	T	T, 1	T, 2	T, 3	T, 4

أجدُ من الجدولِ أنَّ لهذه التجربة 8 نواتجٍ ممكنة؛ لذا فإنَّ الفضاءَ العينيَّ هو:

$$(H, 1), (H, 2), (H, 3), (H, 4), (T, 1), (T, 2), (T, 3), (T, 4)$$

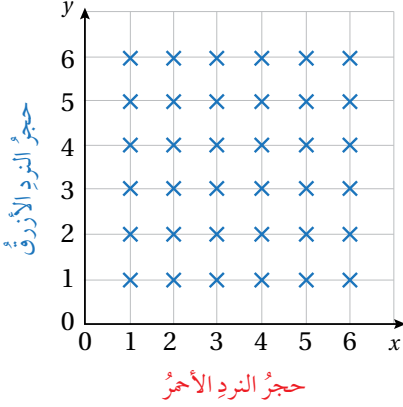
أتتحقق من فهمي:

أستعملُ الجدولَ لتحديد الفضاءِ العينيِّ لتجربة رمي قطعة نقدٍ مرةً واحدةً عشوائيًا وسحب بطاقةٍ عشوائيًا مِنْ كَيْسٍ يحتوي 3 بطاقاتٍ متماثلةٍ كُتبت عليها الأرقام 1, 2, 3

يمكنُني أيضًا استعمالُ **مخطط الاحتمال** (possibility diagram) لإيجادِ الفضاءِ العينيِّ للتجاربِ العشوائية.

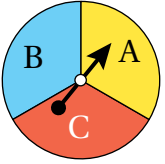


أستعملُ مخططَ الاحتمالِ لتحديدِ الفضاءِ العينيِّ لتجربةِ رميِ حجرَيِ نردٍ مرةً واحدةً عشوائياً أحدهما لونهُ أحمرُ والآخرُ لونهُ أزرقُ.



أرسمُ محورين، وأسجّلُ على أحدهما نواتجَ رميِ حجرِ النردِ الأحمرِ، وعلى المحورِ الآخرِ نواتجَ رميِ حجرِ النردِ الأزرقِ، كما في الشكلِ المجاورِ، حيثُ يمثلُ تقاطعُ خطوطِ مخططِ الاحتمالِ الفضاءِ العينيِّ للتجربةِ.

أتدقّقُ من فهمي:

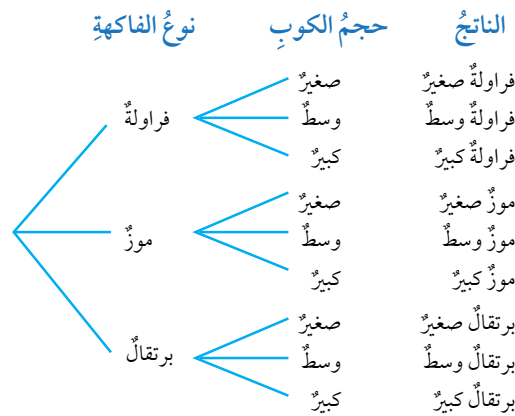


قرصٌ دائريٌّ مقسّمٌ إلى 3 قطاعاتٍ متطابقةٍ كُتِبَتْ عليها الأحرفُ A, B, C كما في الشكلِ المجاورِ. أستخدمُ مخططَ الاحتمالِ لتحديدِ الفضاءِ العينيِّ لتجربةِ تدويرِ مؤشرِ القرصِ مرّتينِ عشوائياً.

مثال 4: من الحياة



عصيرٌ طبيعيٌّ: تريدُ عبيرٌ شراءَ عصيرٍ طبيعيٍّ من محلٍّ يبيعُ العصيرَ في أكوابٍ بثلاثةِ أحجامٍ مختلفةٍ: صغيرٍ، ووسطٍ، وكبيرٍ، ولديه 3 أنواعٍ مختلفةٍ من الفاكهة: فراولةٌ، وموزٌ، وبرتقالٌ. كمَ خياراً مختلفاً أمامَ عبيرٍ لشراءِ العصيرِ؟
يمكنني استعمالُ الشجرةِ البيانيةِ لتحديدِ عددِ الخياراتِ الممكنةِ أمامَ عبيرٍ.



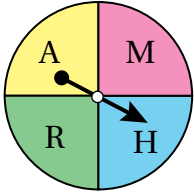
إذن، لدى عبيرٍ 9 بدائلٍ مختلفةٍ للعصيرِ.



أتحقق من فهمي:

بوشار: يرغب مهند في شراء بوشار يُباع في علب بثلاثة أحجام مختلفة: صغير، ووسط، وكبير، وأمامه نكهتان مختلفتان: الملح، والزبدة، كم خيارًا مختلفًا أمام مهند لشراء البوشار؟

أدرب وأحل المسائل



1 أستعمل مخطط الشجرة لتحديد الفضاء العيني لتجربة تدوير مؤشر القرص المجاور مرتين عشوائيًا.

2 أستعمل مخطط الاحتمال لتحديد الفضاء العيني لتجربة رمي قطعة نقد وحجر نرد مرة واحدة عشوائيًا.



3 سُحِبَت كُرَتَانِ عشوائيًا على التوالي دون إرجاع من صندوق يحتوي الكرات الأربع المتماثلة المجاورة:

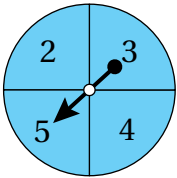
4 أستعمل الجدول لتحديد الفضاء العيني للتجربة.

أجد عدد عناصر الفضاء العيني.

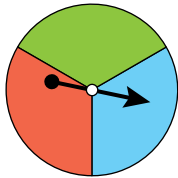
إرشاد

أرمز إلى اللون الأحمر بالحرف R ، واللون الأخضر بالحرف G ، واللون الأزرق بالحرف B ، واللون الأصفر بالحرف Y ، وهي الحروف الأولى من أسماء هذه الألوان باللغة الإنجليزية:

Red → R
Green → G
Blue → B
Yellow → Y



القرص A



القرص B

أستعمل مخطط الشجرة لتحديد الفضاء العيني للتجارب العشوائية الآتية المعتمدة على القرصين الدائريين المجاورين، علمًا بأنهما مقسمان إلى أجزاء متطابقة:

5 تدوير مؤشر القرص A ومؤشر القرص B مرة واحدة عشوائيًا.

6 تدوير مؤشر القرص A مرتين عشوائيًا.

7 تدوير مؤشر القرص B مرتين عشوائيًا.

8 تدوير مؤشر القرص B ثلاث مرات عشوائيًا.

أفكر

هل يمكن تمثيل التجربة العشوائية في السؤال 8 باستعمال مخطط الاحتمال؟

الوحدة 9

دَوَّرَ مؤشر قرصٍ مقسَّمٍ إلى 3 قطاعاتٍ متطابقةٍ ألوانها: أحمر (R)، وأزرق (B)، وأبيض (W) مرةً واحدةً عشوائيًا، ثُمَّ دَوَّرَ مؤشر قرصٍ آخرٍ مقسَّمٍ إلى 4 قطاعاتٍ متطابقةٍ كُتِبَتْ عليها الأرقام 1, 2, 3, 4 مرةً واحدةً عشوائيًا.

أستعملُ مخططَ الاحتمالِ لتحديدِ الفضاءِ العينيِّ للتجربةِ العشوائيةِ.

أجدُ عددَ عناصرِ الفضاءِ العينيِّ.



وحدة تخزين: يرغبُ يوسفُ في شراءِ مشغِّلِ (مقاطعِ

صوتيةٍ)، ولديه 4 سَاعاتٍ مختلفةٍ بالجيجابايتِ:

2GB, 4GB, 8GB, 16GB، ويمكنه الاختيارُ من 5 ألوانٍ

مختلفةٍ: الفضيّ، والأخضر، والأزرق، والزهريّ، والأسودِ:

أستعملُ الجدولَ لتحديدِ جميعِ البدائلِ الممكنةِ ليوسفَ عندَ اختيارِ المشغِّلِ.

أجدُ عددَ الخياراتِ الممكنةِ أمامَ يوسفَ.

يقدمُ مطعمٌ قائمةَ الطعامِ المجاورةَ لزيائته:

أستعملُ مخططَ الشجرةِ لتحديدِ جميعِ

الخياراتِ الممكنةِ لوجبةِ طعامٍ مكوَّنةٍ من:

طبقٍ مقبَّلاتٍ، وطبقٍ رئيسٍ، وطبقٍ تحليةٍ.

أجدُ عددَ الخياراتِ الممكنةِ لوجبةِ

الطعامِ.

أعودُ إلى فقرةٍ (أستكشفُ)، وأحلُّ المسألةَ الواردةَ فيها.

مهاراتُ التفكيرِ العليا

تحدِّ: قرصٌ مقسَّمٌ إلى n منَ القطاعاتِ المتطابقةِ، أجدُ عددَ عناصرِ الفضاءِ العينيِّ

لتجربةِ تدويرِ مؤشرِه مرَّتينِ.

مسألةٌ مفتوحةٌ: أعطي مثلاً على تجربةٍ عشوائيةٍ عددُ عناصرِ الفضاءِ العينيِّ لها 30

أكتبُ كيفَ أحدِّدُ الفضاءَ العينيِّ لتجربةٍ عشوائيةٍ؟

أستكشف



نسي أحمد أول رقمين من رمز الدخول إلى بريده الإلكتروني، لكنه تذكر أن الرقم الأول فردي والرقم الثاني زوجي. ما احتمال أن يختار أحمد الرقمين الصحيحين لرمز الدخول؟

فكرة الدرس

- أجد احتمالات حوادث مركبة.
- أجد احتمالات حوادث مستقلة.

المصطلحات

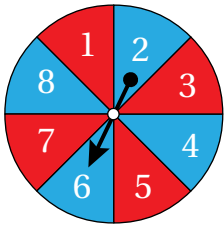
الحدث البسيط، الحدث المركب.

يُسمى الحدث الذي يحتوي ناتجًا واحدًا فقط **حدثًا بسيطًا** (simple event)، أما **الحدث المركب** (compound event) فهو حادث يتكوّن من حادثين بسيطين أو أكثر، تقع مرة واحدة أو حدثًا تلو الآخر. ويمكن إيجاد احتمال الحدث المركب بإيجاد نسبة عدد عناصره إلى عدد عناصر الفضاء العيني:

$$P(A) = \frac{\text{عدد عناصر الحدث}}{\text{عدد عناصر الفضاء العيني}}$$

يمكن استعمال مخطط الشجرة لإيجاد احتمالات الحوادث المركبة.

مثال 1



قرص مقسم إلى 8 قطاعات متطابقة كتبت عليها الأرقام من 1 إلى 8 أي الحوادث الآتية بسيطة وأبها مركبة:

1 وقوف مؤشر القرص عند عدد أكبر من 4 عند تدويره مرة واحدة عشوائيًا.

الحدث بسيط؛ لأن المؤشر سيقف عند عدد واحد فقط أكبر من 4

2 وقوف مؤشر القرص عند عدد أكبر من 4 عند تدويره مرتين عشوائيًا.

الحدث مركب؛ لأنه مكوّن من حادثين بسيطين هما: وقوف المؤشر عند تدويره أول مرة عند عدد أكبر من 4، ثم وقوفه عند عدد أكبر من 4 عند تدويره المرة الثانية.

أتحقق من فهمي:

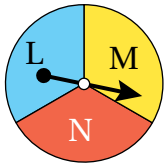


أيُّ الحوادثِ الآتية بسيطةٌ وأيُّها مركّبةٌ:

3 ظهورُ كتابةٍ على الوجهِ العلويِّ لقطعةٍ نقدٍ عند رميها مرّةً واحدةً عشوائياً.

4 ظهورُ كتابةٍ على الوجهِ العلويِّ لقطعةٍ نقدٍ عند رميها مرّتين عشوائياً.

مثال 2



قرصٌ مقسّمٌ إلى 3 قطاعاتٍ متطابقةٍ كُتِبَتْ عليها الأحرفُ L, M, N كما في الشكلِ المجاور. دوّر مؤشّر القرص مرّتين عشوائياً، وسجّل الحرفان اللذان وقفَ عندهما المؤشّر، أستمعل مخطط الشجرة لأجد:

المرّة الأولى	المرّة الثانية	الناتج
L	L	(L, L)
	M	(L, M)
	N	(L, N)
M	L	(M, L)
	M	(M, M)
	N	(M, N)
N	L	(N, L)
	M	(N, M)
	N	(N, N)

1 احتمال وقوع المؤشّر عند الحرف نفسه في المرّتين.

أمثّل الفضاء العينيّ للتجربة باستعمال مخطط الشجرة.

ألاحظ أنّ عدد عناصر الفضاء العينيّ 9

أفترض أنّ الحادث A هو وقوع المؤشّر عند الحرف نفسه

مرّتين، إذن عدد عناصر هذا الحادث يساوي 3؛ لذا فإنّ احتمال

الحادث A هو:

$$P(A) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

المرّة الأولى	المرّة الثانية	الناتج
L	L	(L, L)
	M	(L, M)
	N	(L, N)
M	L	(M, L)
	M	(M, M)
	N	(M, N)
N	L	(N, L)
	M	(N, M)
	N	(N, N)

2 احتمال وقوع المؤشّر عند الحرف L في أيّ من المرّتين أو كليهما.

أفترض أنّ الحادث B هو وقوع المؤشّر عند الحرف L في أيّ من

المرّتين أو كليهما، إذن عدد عناصر هذا الحادث 5؛ لذا فإنّ احتمال

الحادث B هو:

$$P(B) = \frac{5}{9}$$

أتحقق من فهمي:

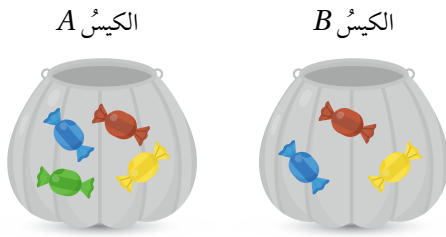


3 احتمال وقوع المؤشر عند الحرف M في المرة الأولى فقط.

4 احتمال وقوع المؤشر عند الحرف N في أيٍّ من المرّتين أو كليهما.

يمكن استعمال الجدول في إيجاد احتمالات الحوادث المركبة.

مثال 3



سحبْتُ غديرُ قطعة حلوى عشوائياً من كل كيسٍ من الكيسين المجاورين، أستعملُ جدولاً لأجد:

1

احتمال سحبِ قطعتي حلوى من اللون نفسه.

أمثلُ الفضاء العيني للتجربة باستعمال جدول. ألاحظُ أن عدد عناصر الفضاء العيني 12

أفترضُ أن الحادث A هو سحبُ قطعتي حلوى لهما اللون نفسه، إذن عدد عناصر هذا الحادث 3؛ لذا فإن احتمال الحادث A يساوي:

$$P(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

2

احتمال سحبِ قطعتي حلوى ليست أيٌّ منهما زرقاء أو خضراء.

أفترضُ أن الحادث يمثل سحبَ قطعتي حلوى ليست أيٌّ منهما زرقاء أو خضراء.

ألاحظُ من الجدول أنه توجد 4 نواتج لا تحتوي قطعة حلوى زرقاء أو خضراء؛ لذا فإن احتمال الحادث B يساوي:

$$P(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

		الكيس B		
		R	B	Y
الكيس A	R	R, R	R, B	R, Y
	Y	Y, R	Y, B	Y, Y
	B	B, R	B, B	B, Y
	G	G, R	G, B	G, Y

		الكيس B		
		R	B	Y
الكيس A	R	R, R	R, B	R, Y
	Y	Y, R	Y, B	Y, Y
	B	B, R	B, B	B, Y
	G	G, R	G, B	G, Y

أتحقق من فهمي:

- 3 احتمال سحب قطعة حلوى خضراء. 4 احتمال سحب قطعتي حلوى مختلفتين في اللون.

يمكن أيضاً استعمال مخطط الاحتمال لإيجاد احتمالات الحوادث المركبة.

مثال 4



في تجربة رمي حجرَي نرد مرة واحدة عشوائياً أحدهما لونه أخضر والآخر لونه بنفسجي، أستخدم مخطط الاحتمال لأجد:

- 1 احتمال ظهور الرقم 3 على كلا المكعبين.

أمثل الفضاء العيني للتجربة باستعمال مخطط الاحتمال. ألاحظ أن عدد عناصر الفضاء العيني 36

أفترض أن الحادث A هو ظهور الرقم 3 على كلا المكعبين، إذن عدد عناصر هذا الحادث 1؛ لذا فإن احتمال الحادث A هو:

$$P(A) = \frac{1}{36}$$

- 2 احتمال ظهور الرقم 3 مرة واحدة فقط.

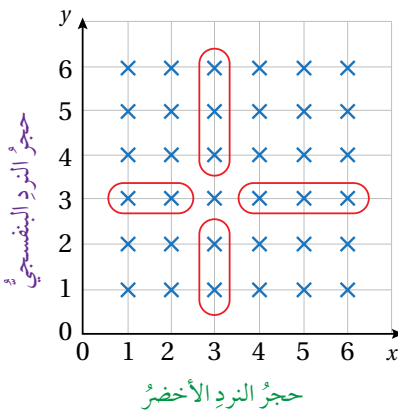
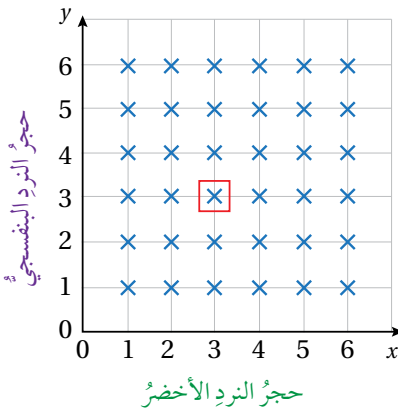
أفترض أن الحادث B هو ظهور الرقم 3 مرة واحدة فقط.

ألاحظ من مخطط الاحتمال وجود 10 نواتج ظهر فيها الرقم 3 مرة واحدة فقط؛ لذا فإن احتمال الحادث B يساوي:

$$P(B) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

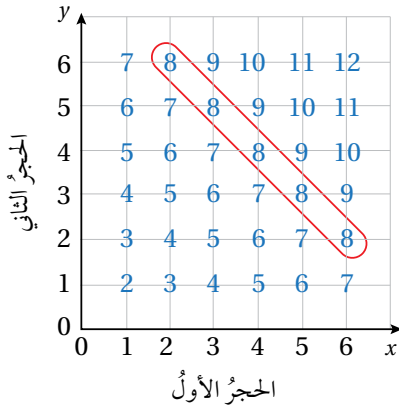
أتحقق من فهمي:

- 3 احتمال ظهور الرقم 3 مرة واحدة على الأقل. 4 احتمال عدم ظهور الرقم 3



مثال 5

في تجربة رمي حجرَي نردٍ متمايزين مرةً واحدةً عشوائيًا وإيجادِ ناتجِ جمعِ العددينِ الظاهريين، أجدُ:



1 احتمال أن يكون مجموع العددين الظاهريين يساوي 8

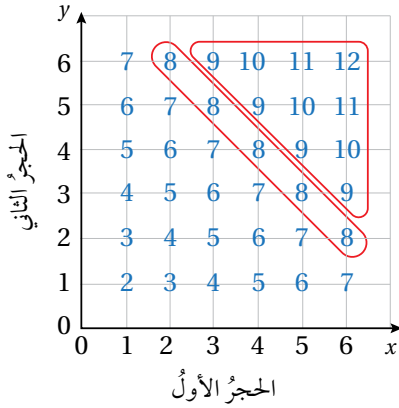
يمكنني استعمال مخطط الاحتمال لكتابة المجموع لكل ناتج.

ألاحظ أن عدد عناصر الفضاء العيني 36

أفترض أن الحادث A هو ظهور عددين مجموعهما 8،

إذن عدد عناصر الحادث 5؛ لذا فإن احتمال الحادث A يساوي:

$$P(A) = \frac{5}{36}$$



2 احتمال أن يكون مجموع العددين الظاهريين أكبر من أو يساوي 8

أفترض أن الحادث B هو ظهور رقمين مجموعهما أكبر أو يساوي 8

ألاحظ من مخطط الاحتمال وجود 10 نواتج مجموعها أكبر من 8،

و 5 نواتج مجموعها 8، إذن عدد عناصر الحادث 15؛ لذا فإن احتمال

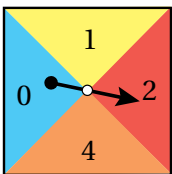
الحادث B يساوي:

$$P(B) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

✓ **أتحقق من فهمي:**

3 احتمال أن يكون مجموع العددين الظاهريين أقل من 8

4 احتمال أن يكون مجموع العددين الظاهريين أقل من أو يساوي 8



اعتمادًا على الشكل المجاور المقسم إلى 4 قطاعات متطابقة كتبتُ

عليها الأرقام 1, 2, 3, 4 أي الحوادث الآتية بسيطة وأيها مركبة:

وقوف المؤشر عند عدد زوجي عند تدويره مرةً واحدةً عشوائيًا.

وقوف المؤشر عند عدد فردي عند تدويره مرتين متتاليتين عشوائيًا.

وقوف المؤشر عند عدد أقل من 4 عند تدويره مرةً واحدةً عشوائيًا.

وقوف المؤشر عند العدد نفسه عند تدويره مرتين عشوائيًا.

أتحارب
وأحل المسائل

الوحدة 9

في تجربة رمي قطعتي نقد عشوائياً مرة واحدة، أستمعل مخطط الشجرة لإيجاد احتمال:

5 ظهور صورتين. 6 ظهور صورة وكتابة.

7 ظهور صورة واحدة على الأقل. 8 عدم ظهور صورة.

في تجربة رمي حجرَي نرد مرة واحدة عشوائياً، أستمعل الجدول لإيجاد احتمال أن يكون:

9 الرقمان الظاهران أقل من 5 10 الرقمان الظاهران زوجيين.

11 أحد الرقمين الظاهرين أولياً.

سحبنا دينا عشوائياً بطاقة من 4 بطاقات كُتبت عليها الأرقام 1, 2, 3, 4 ورمّت حجرَ نرد مرة واحدة عشوائياً، ثم أوجدت مجموع الرقمين الظاهرين. أستمعل مخطط الاحتمال لأجد احتمال أن يكون مجموع الرقمين:

12 يُساوي 5 13 أكبر من 6

في تجربة رمي حجرَي نرد مرة واحدة عشوائياً وإيجاد ناتج جمع الرقمين الظاهرين، أجد احتمال أن يكون مجموع الرقمين الظاهرين:

14 يُساوي 4 15 يُساوي 7 16 أقل من 4

17 عددًا زوجياً. 18 من مضاعفات العدد 3 19 مربعاً كاملاً.

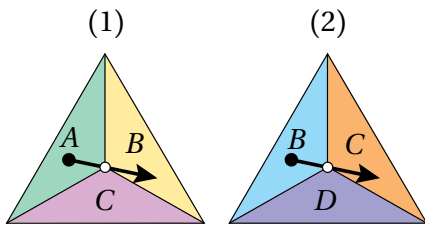


يحتوي كيس 4 حبّات كعك، اثنتان منها بحشوة المُرَبّي، وواحدة بحشوة الشوكولاتة، وواحدة بحشوة الكريمة. اختار محمود كعكة عشوائياً من الكيس وأكلها، ثم أخذ كعكة أخرى. أستمعل الجدول لأجد احتمال:

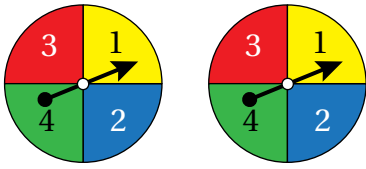
20 أن تكون حبّتا الكعك بحشوة المُرَبّي.

21 أن تكون إحدى حبّتي الكعك بحشوة الكريمة.

22 أن تكون حبّتا الكعك بحشوة الشوكولاتة.



23 في إحدى الألعاب، يُدَوَّر مؤشِّر كلٍّ من الشكلين المجاورين مرةً واحدةً عشوائيًا، ويحصل اللاعبُ على نقطة إذا توقف مؤشِّر كلا الشكلين على الحرف نفسه. ما احتمال الحصول على نقطة؟



قرصان دائريّان كلٌّ منهما مقسَّم إلى 4 قطاعاتٍ متطابقة كُتِبَتْ عليها الأرقام 1, 2, 3, 4 كما يظهر في الشكل المجاور.

تم تدوير مؤشريهما معًا مرةً واحدةً عشوائيًا وإيجاد ناتج ضرب الرقمين اللذين يقف عندهما المؤشران، أجد احتمال أن يكون ناتج ضرب الرقمين:

25 يُساوي 3

24 يُساوي 4

مهارات التفكير العليا

26 **تبرير:** قرصان دائريّان كلٌّ منهما مقسَّم إلى 8 قطاعاتٍ متطابقة كُتِبَتْ عليها الأرقام من 1 إلى 8 تم تدوير مؤشري القرصين معًا مرةً واحدةً عشوائيًا، وإيجاد ناتج ضرب الرقمين اللذين يقف عندهما المؤشران. أجد احتمال أن يكون ناتج ضرب الرقمين مربعًا كاملاً زوجيًا، مبررًا إجابتي.

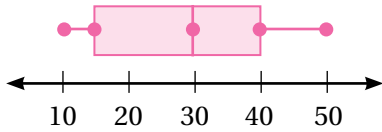
27 **تبرير:** رمت لمياء حجرَي نردٍ متمايزين مرةً واحدةً عشوائيًا، ثم أوجدت ناتج ضرب الرقمين الظاهريين. أجد احتمال ألا يكون ناتج الضرب بين 19 و35، مبررًا إجابتي.

28 **مسألة مفتوحة:** أصف تجربة عشوائية، ثم أحدّد حدثًا مركّبًا فيها وأجد احتمالَهُ.

29 **أكتب:** كيف أجد احتمال حدثٍ مركّبٍ باستعمال مخطط الشجرة؟

اختبار الوحدة

أستعمل التمثيل بالصندوق ذي العارضتين أدناه للإجابة
عن الأسئلة 7، 8، 9:

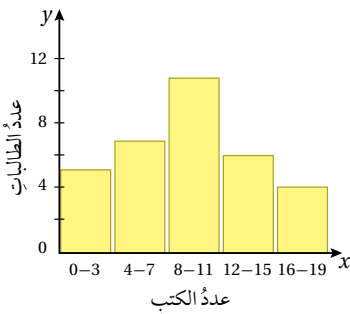


7 أجد القيمتين: العظمى، والصغرى، والرَّبيع الأعلى،
والرَّبيع الأدنى، والوسيط، للبيانات الممثلة.

8 أصف توزيع البيانات.

9 أجد القيم المتطرفة في البيانات (إن وجدت).

10 صممت رنا استبانة حول عدد الكتب التي قرأتها
طالبات صفها خلال شهر، ومثلت النتائج بالمخطط
التكراري الآتي. أكتب استدلالاً بالاعتماد على
التمثيل.



في تجربة رمي حجرٍ نردٍ متمايزين، أستخدم الجدول
لإيجاد احتمال أن يكون:

11 العددان الظاهران أكبر من 4

12 العددان الظاهران زوجيين.

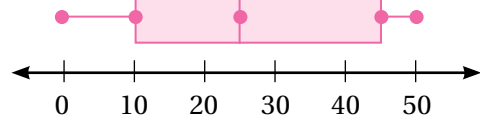
أختار رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1 مدى البيانات الآتية يساوي:

53, 57, 62, 48, 45, 65, 40, 42, 55

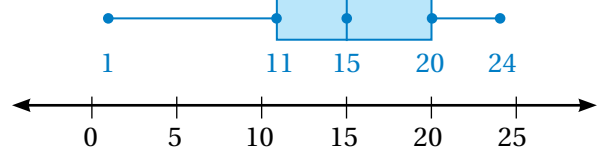
a) 11 b) 25 c) 53 d) 65

2 الرَّبيع الأعلى للبيانات الممثلة بالصندوق ذي
العارضتين أدناه هو:



a) 0 b) 10 c) 25 d) 45

أستعمل التمثيل بالصندوق ذي العارضتين الآتي للإجابة
عن السؤالين 3 و 4



3 نسبة البيانات التي تزيد على 20:

a) 25% b) 50% c) 75% d) 100%

4 نسبة البيانات التي تقل عن 15:

a) 25% b) 50% c) 75% d) 100%

أجد المدى والرَّبيعيات والمدى الرَّبِيعِيَّ لكل مجموعة
بيانات مما يأتي:

5 40, 33, 37, 54, 41, 3, 27, 39, 35

6 132, 127, 106, 140, 158, 135, 129, 138

اختبار الوحدة

تدريب على الاختبارات الدولية

18 أي القيم في مجموعة البيانات الآتية متطرفة؟

3.7, 3.0, 3.4, 3.6, 5.2, 5.4,

3.2, 3.8, 4.3, 4.5, 4.2, 3.7

a) 3.0

b) 5.4

c) 3.0, 5.4

d) لا توجد قيم متطرفة

19 وسيط البيانات الآتية هو:

7, 8, 14, 3, 2, 1, 24, 18, 9, 15

a) 8.5

b) 10.1

c) 11.5

d) 23

20 أي مجموعات البيانات الآتية المدى الربيعي لها يساوي 10؟

a) 3, 4, 9, 16, 17, 24, 31

b) 41, 43, 49, 49, 50, 53, 55

c) 12, 14, 17, 19, 19, 20, 21

d) 55, 56, 56, 57, 58, 59, 62

21 أربع بطاقات كُتبت عليها الأرقام 1, 2, 3, 4، إذا سُحِبَتْ منها بطاقة عشوائياً وأُرجِعت، ثُمَّ سُحِبَتْ بطاقة أخرى عشوائياً، فما احتمال أن تحمل البطاقتان الرقم 2؟

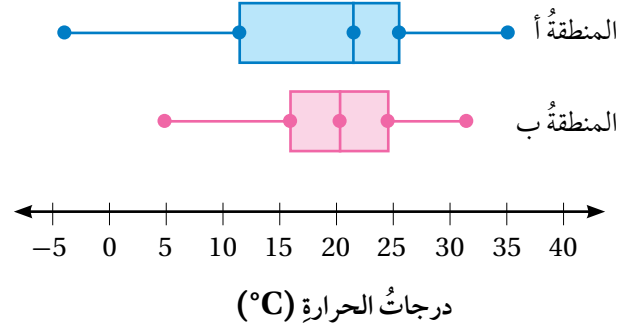
a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{8}$

d) $\frac{1}{16}$

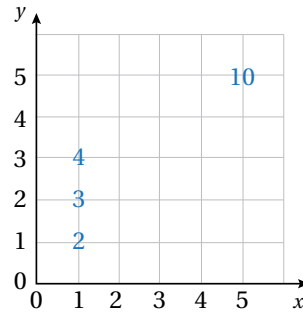
درجات حرارة: بيّن تمثيل الصندوق ذي العارضتين المزدوج أدناه درجة الحرارة وقت الظهيرة في المنطقتين السياحتين أ و ب على مدار العام:



13 أصف الفروق بين مجموعتي البيانات.

14 ترغب ريم في قضاء شهر تموز في إحدى المنطقتين، فأَيُّ المنطقتين أنصحها بها؟ أبرّر إجابتني.

قرصان كل منهما مقسّم إلى 5 قطاعات متطابقة كُتبت عليها الأرقام 1, 2, 3, 4, 5. دوّر مؤشرهما معاً مرة واحدة عشوائياً وأوجد ناتج جمع الرقمين اللذين يقفان عندهما. أكمل مخطط



الاحتمال المجاور، ثم أجد احتمال أن يكون مجموع الرقمين الظاهرين:

16 عددًا زوجيًا.

15 يساوي 5

17 أقل من 7